

Komplexa tal 2015

Komplexa tal är en konstruktion av två reella tal och en symbol j av typen $z = a + jb$, som lyder de vanliga räknelagarna, tex den distributiva lagen, den associativa lagen osv. med det viktiga tillägget att:

$$j^2 = -1$$

För övrigt kan jb uppfattas som "j gånger b ".

Exempel

Bestäm $z_1 z_2$ om $z_1 = 2 + j5$ och $z_2 = 4 - j6$.

Lösning

$$z_1 z_2 = (2 + j5)(4 - j6) = 2 \cdot 4 - 2 \cdot j \cdot 6 + j \cdot 5 \cdot 4 - j^2 \cdot 5 \cdot 6 = 8 - j12 + j20 - (-1) \cdot 30 = \underline{\underline{38 + j8}}$$

I uttrycket $z = a + jb$ kallas a det komplexa talets **realdel** och b det komplexa talets talets **imaginärdel**. Detta skrives $\text{Re}z = a$ resp. $\text{Im}z = b$.

Observera att realdelen och imaginärdelen är reella tal!

Om $z = a + jb$ kallas talet $a - jb$ **komplexkonjugatet** till z och betecknas $\bar{z}$.

Exempel

Bestäm $\frac{z_2}{z_1}$ med z_1 och z_2 enligt föregående exempel.

Lösning

$$\begin{aligned} \frac{z_2}{z_1} &= \frac{4 - j6}{2 + j5} = (\text{förläng med komplexkonjugatet}) = \frac{(4 - j6)(2 - j5)}{(2 + j5)(2 - j5)} = \frac{8 - j12 - j20 + j^2 \cdot 30}{2^2 - (j5)^2} = \frac{-22 - j32}{4 - (-25)} = \\ &= \frac{-22 - j32}{29} = \underline{\underline{-\frac{22}{29} - j\frac{32}{29}}} \end{aligned}$$

Här såg vi i nämnaren exempel på att $z \cdot \bar{z}$ är ett reellt tal. Detta gäller allmänt ty

$$z = a + jb \Rightarrow z \cdot \bar{z} = (a + jb)(a - jb) = a^2 - (jb)^2 = a^2 - (-b^2) = a^2 + b^2$$

Eulers formel

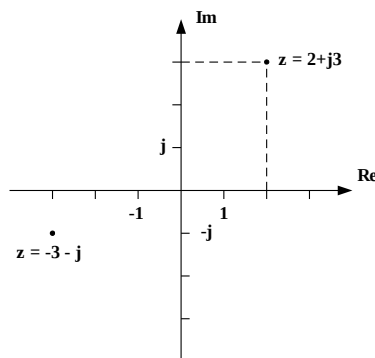
$$e^{j\varphi} = \cos\varphi + j\sin\varphi$$

Detta samband kallas **Eulers formel**.

Det komplexa talplanet

Eftersom komplexa tal har två "komponenter" kan varje punkt i det reella talplanet identifieras med ett komplext tal, varvid vi får det **komplexa talplanet**.

x- och y-axlarna övergår då till att vara **realaxel** resp. **imaginäraxel**, se fig.



Punkten (a, b) i planet identifieras alltså med det **komplexa talet**

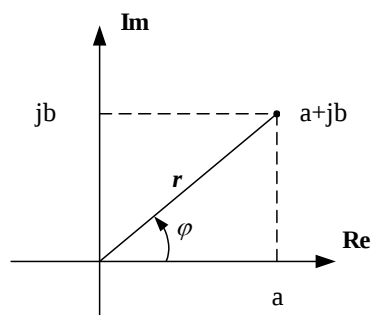
$z = a + jb$ i talplanet.

Detta sätt att ange det komplexa talet kallas **rektangulär form**.

Denna geometriska tolkning ger dessutom ett nytt sätt att representera komplexa tal, nämligen **polär form**.

Eftersom $a = r \cos \varphi$ och $b = r \sin \varphi$ kan det komplexa talet z skrivas som $z = r \cos \varphi + jr \sin \varphi = r(\cos \varphi + j \sin \varphi)$, vilket med Eulers formel blir

$$z = re^{j\varphi}$$



Här är $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ det komplexa talets **absolutbelopp** och φ **dess argument** för vilket gäller

$$\tan \varphi = \frac{b}{a}.$$

Detta gör att följande gäller för argumentet φ

$$\varphi = \arg z = \begin{cases} \arctan \frac{b}{a} & a > 0 \quad b > 0 & 1: a \text{ kvadranten} \\ \arctan \frac{b}{a} + 180^\circ & a < 0 \quad b > 0 & 2: a \text{ kvadranten} \\ \arctan \frac{b}{a} - 180^\circ & a < 0 \quad b < 0 & 3: e \text{ kvadranten} \\ \arctan \frac{b}{a} & a > 0 \quad b < 0 & 4: e \text{ kvadranten} \end{cases}$$

Exempel

Skriv $z = 6 \cdot e^{j140^\circ}$ på rektangulär form.

Lösning

Eulers formel ger $z = 6 \cdot \cos 140^\circ + j6 \cdot \sin 140^\circ = \underline{\underline{-4,60 + j3,86}}$

Exempel

Skriv $z = -3 + j4$ på polär form.

Lösning

$$r = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5, \text{ 2:a kvadranten} \Rightarrow \varphi = \arctan \frac{4}{-3} + 180^\circ \Rightarrow \varphi = 126,9^\circ, \text{ så att } \underline{\underline{z = 5 \cdot e^{j126,9^\circ}}}$$

Exempel

Skriv $z = -12 - j5$ på polär form.

Lösning

$$r = \sqrt{(-12)^2 + (-5)^2} = 13, \text{ 3:e kvadranten} \Rightarrow \varphi = \arctan \frac{-5}{-12} - 180^\circ \Rightarrow \varphi = -157,4^\circ, \text{ så att}$$

$$\underline{\underline{z = 13 \cdot e^{-j157,4^\circ}}}$$

Komplexa tal adderas och subtraheras då de är skrivna på rektangulär form.

Komplexa tal multipliceras eller divideras lättast om de är skrivna på polär form.

Exempel

Låt $z_1 = 3 + j4$ och $z_2 = 2 - j2$. Bestäm $z_1 \cdot z_2$ och $\frac{z_1}{z_2}$.

Lösning

Skriv om på polär form.

$$z_1 = 5 \cdot e^{j53,1^\circ} \quad z_2 = 2\sqrt{2} \cdot e^{-j45^\circ} = 2,83 \cdot e^{-j45^\circ}$$

$$z_1 \cdot z_2 = 5 \cdot e^{j53,1^\circ} \cdot 2\sqrt{2} \cdot e^{-j45^\circ} = 5 \cdot 2\sqrt{2} \cdot e^{j53,13^\circ} \cdot e^{-j45^\circ} = 14,1 \cdot e^{j(53,13^\circ - 45^\circ)} = \underline{\underline{14,1 \cdot e^{j8,13^\circ}}} = \underline{\underline{14 + j2}}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{5 \cdot e^{j53,13^\circ}}{2\sqrt{2} \cdot e^{-j45^\circ}} = \frac{5}{2\sqrt{2}} \cdot e^{j98,13^\circ} = \underline{\underline{1,77 \cdot e^{j98,13^\circ}}} = \underline{\underline{-0,25 + j1,75}}$$

Övningar

Låt $z_1 = 2 + j3$ och $z_2 = -3 + j4$ i uppgifterna 1 – 3.

1. Bestäm $\bar{z}_1$ och $\bar{z}_2$.
2. Bestäm z_1 och z_2 på polär form.
3. Bestäm a. $z_1 + z_2$ b. $\bar{z}_1 - z_2$ c. $z_1 + \bar{z}_2$ d. $z_1 \cdot z_2$ (svar på polär form)
e. $\frac{z_1}{z_2}$ (svar på rektangulär form).
4. Bestäm k så att $z = \frac{5 + jk}{-4 + j7}$ blir ett reellt tal.

Låt $z_1 = 4e^{j30^\circ}$ och $z_2 = 6e^{-j45^\circ}$ i uppgifterna 5 – 7.

5. Bestäm $\bar{z}_1$ och $\bar{z}_2$.
6. Bestäm z_1 och z_2 på rektangulär form.
7. Bestäm $z_1 \cdot z_2$ och $z_1 + z_2$.

Svar

1. $\bar{z}_1 = 2 - j3$ $\bar{z}_2 = -3 - j4$
2. $2 + j3 = \sqrt{13}e^{j56,3^\circ}$ $-3 + j4 = 5e^{j126,9^\circ}$
3. a. $-1 + j7$ b. $5 + j7$ c. $-1 - j$ d. $\sqrt{325}e^{-j176,8^\circ}$ e. $0,239 - j0,680$
4. $k = -8,75$
5. $\bar{z}_1 = 4e^{-j30^\circ}$ $\bar{z}_2 = 4e^{j45^\circ}$
6. $z_1 = 2\sqrt{3} + j2$ $z_2 = \frac{6}{\sqrt{2}} - j\frac{6}{\sqrt{2}}$
7. $z_1 \cdot z_2 = 24 \cos 15^\circ - j24 \sin 15^\circ = 23,2 - j6,21$ $z_1 + z_2 = 2\sqrt{3} + \frac{6}{\sqrt{2}} + j\left(2 - \frac{6}{\sqrt{2}}\right)$