

Ex Rinn alla primitiva funktioner till
 $f(x) = \sqrt{1-x^2}$; dvs beräkna $\int \sqrt{1-x^2} dx$

Lösningsskiss: Integranden finns inte med i listan
 över elementära funktions derivator och det förhåller sig
 inte derivate. Vi försöker då använda substitution enligt
 Riemannintegration för att få oss hjälp till lösning.

Här passar det väl med $x = x(t) = \sin t$ och vi antar
 vidare att $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ så att vi har en omvärtad avbildning

som substitution. Detta kan uttryckas som

$$x = \sin t, \quad |t| \leq \frac{\pi}{2} \quad \text{och detta är ekvivalent med den} \\
\text{heltäckande beskrivningen } t = \arcsin x. \quad \forall \text{ för } I \equiv \int \sqrt{1-x^2} dx \\
= \left[t = \arcsin x \right] = \int \sqrt{1-\sin^2 t} \cos t dt = \int \sqrt{\cos^2 t} \cos t dt =$$

$$\stackrel{\frac{dx}{dt} = \cos t}{=} \int |\cos t| \cos t dt = \left[\begin{array}{l} \text{ty } t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ \text{så } \cos t \geq 0 \end{array} \right] = \int \cos t \cos t dt = \int \cos^2 t dt$$

$$= \left[\begin{array}{l} \text{ty } \cos^2 t = \\ = \frac{1}{2} (1 + \cos(2t)) \end{array} \right] = \int \frac{1}{2} (1 + \cos(2t)) dt = \frac{1}{2} \int (1 + \cos(2t)) dt =$$

$$= \frac{1}{2} \left(t + \frac{\sin(2t)}{2} \right) + C = \frac{1}{2} t + \frac{\sin(2t)}{4} + C \quad (\text{ty } C \text{ godtyckligt})$$

$$= \frac{1}{2} \arcsin x + \frac{\sin t \cos t}{2} + C = \frac{1}{2} \arcsin x + \frac{x \sqrt{1-\sin^2 t}}{2} + C$$

$$= \left(\text{den +-tecknet gäller ty } t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \text{ så } \cos t \geq 0 \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \arcsin x + \frac{1}{2} x \sqrt{1-x^2} + C$$

$$\text{Kontroll: } \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{2} \arcsin x + \frac{1}{2} x \sqrt{1-x^2} \right) = \dots = \sqrt{1-x^2} \quad \text{så OK!} \\
(\text{Utta derivatorna!})$$