

1. **z-transformen**
2. **Invers z-transformen**

Z-transformen

Definition

Mest generellt koncept för tidsdiskreta signaler

*Z-transformen
(enkelsidigt)*

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n}$$

Den som vi kommer att använda

Ett par

$$x[n] \overset{Z}{\leftrightarrow} X(z)$$

Jämnför med Laplace

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$

Potensserie

När a_k är en talföljd kallas uttrycket

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_k + \cdots$$

en (potens)serie

Exempel

$$1 + 2 + 3 + \dots + k + \dots$$

Kan inte summera till något vettigt

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6}$$

Serien måste konvergera till en gränsvärde

Potensserien att komma ihåg

$$\sum_{k=0}^{\infty} a^k = \frac{1}{1-a}, \quad |a| < 1$$

Z-transformen

En potensserie som konvergerar

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n}$$

Obs!

Z-transformerade signaler konvergerar inte nödvändigt för alla z .
Man brukar identifiera region i vilken är functionen regulär
Konvergens uppnås när $r=|z|$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x_n r^n| \leq c < \infty$$

*Men i denna kursen antar vi
att signaler uppfyller detta*

Z-transformen: beräkningen

Det finns två olika sätt att transformera dvs. beräkna $X(z)$ från $x[n]$:

- 1) Man tar uttrycket för transformen ur en tabell.
- 2) Man beräknar uttrycket med hjälp av definitionen av z-transformen
(*förra föreläsningen*)

Viktiga Z-transformer:

Impuls $\delta[n]$

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta[n] z^{-n} = 1z^0 = 1$$

Stegfunktion $\sigma[n]$

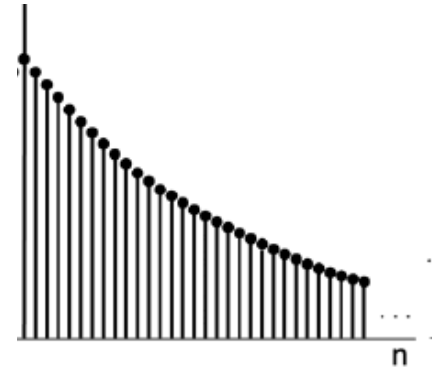
$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u[n] z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (z^{-1})^n = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1}, \quad |z^{-1}| < 1$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} a^k = \frac{1}{1 - a}, \quad |a| < 1$$

Viktiga z-transformer:

Reel exponentiell sekvens

$$x[n] = a^n u[n]$$



$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n$$

$$X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z - a} \text{ for } |z| > |a|$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} a^k = \frac{1}{1 - a}, \quad |a| < 1$$

Exempel

Bestäm z-transformen för följande diskreta signaler:

$$x[n] = \{0.3^n\}$$

$$x[n] = \{5 \cos(3n)\}$$

Beräkning av Z-transformen

Ofta räknar man inte ut Z-transformen från “scratch”
med hjälp av definitionen

Istället använder man tabeller över vanliga transformor

$x(n)$	$X(z)$
$\delta(n)$	1
$\delta(n-k)$	z^{-k}
$u(n)$	$\frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1}$
$a^n u(n)$	$\frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a}$

Z-transformen av tidsförskjuten $\delta(t)$

z-transformen av $\delta[n-1]$

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta[n-1] z^{-n} = z^{-1} = \frac{1}{z}$$

$$z \neq 0$$

z-transformen av $\delta[n+1]$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n+1] z^{-n} = z$$

$$z \neq \infty$$

Z-transformen: satser

Linjäritet:

$$ax_n + by_n \Rightarrow aX(z) + bY(z)$$

Förskott:

$$x[n - N] = z^{-N} X(z)$$

Fördrojning:

$$x[n + N] \Rightarrow z^N X(z)$$

Obs!

Förskott $f[n+n_0] = f[n+n_0]u[n]$
Fördrojning: $f[n-n_0] = f[n-n_0]u[n-n_0]$

Exempel

Bestäm z-transformen för följande diskreta signaler:

$$x_1[n] = \{0.3^n u[n-5]\}$$

Z-transformen: satserna

Multiplication:

$$a^n x_n \Rightarrow X\left(\frac{z}{a}\right)$$

Multiplication n:

$$n^k x_n \Rightarrow (-1)^k z^k \frac{d^k}{dz^k} X(z)$$

Faltning:

$$x_n * y_n \Rightarrow X(z)Y(z)$$

Invers z-transformen

Invers z-transformen

$$x_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{X(z)}{z^{n+1}} dz, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

I praktiken används dock inte denna formel.

Normal arbetsgång är att partialbråksuppdelar uttrycket för z-transformen och därefter identifiera ”standard uttryck från tabellen

...precis som i LT

Steg för invers z-transform

1. Skriv $X(z)$ som en normaliserad rational polynom i z^{-1}
(multiplicera både nämnare och täljare med z^{-N})

Exempel

$$X(z) = \frac{z^{-r}(b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_M z^{-M})}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_N z^{-N}}$$

$$Y(z) = \frac{z^{-1}}{(1 - 0,5z^{-1})(1 - z^{-1})}$$

2. Dela upp $X(z)$ i en summa av enkla bråk –
partialbråksuppdelning/inverteringssatserna

$$z^{-1} \frac{1}{(1 - 0,5z^{-1})(1 - z^{-1})} =$$

$$Y(z) = z^{-1} \left(\frac{2}{(1 - z^{-1})} - \frac{1}{(1 - 0,5z^{-1})} \right)$$

3. Identifiera ut tabellen

$$y[n] = 2u[n-1] - 0,5^{n-1}u[n-1]$$

Exempel

(om vi inte multiplicerar med z^{-1})

Inverstransformera uttrycket

$$Y(z) = \frac{z^{-1}}{(1 - 0,5z^{-1})(1 - z^{-1})}$$

Lösning

Partialbråksuppdelning ger:

$$Y(z) = \frac{2}{(1 - z^{-1})} - \frac{2}{(1 - 0,5z^{-1})}$$

Identifiering ut tabell ger:

$$Y_1(z) = \frac{2}{(1 - z^{-1})} \Leftrightarrow y_1[n] = 2u[n]$$

$$Y_2(z) = \frac{2}{(1 - 0,5z^{-1})} \Leftrightarrow y_2[n] = 2 \times 0,5^n u[n]$$

$$\Rightarrow y[n] = 2(1 - 0,5^n)u[n]$$

Exempel

Annan lösning

Man kan i vissa fall få helt andra uttryck (i z-planet),
som beskriver samma signal

$$Y(z) = z^{-1} \left(\frac{2}{(1-z^{-1})} - \frac{1}{(1-0,5z^{-1})} \right)$$

$$Y(z) = \frac{2}{(1-z^{-1})} - \frac{2}{(1-0,5z^{-1})}$$

Dessa uttryck motsvarar en samma signal (tidsförskjutning)

$$y[n] = 2u[n-1] - 0,5^{(n-1)}u[n-1] \neq 2(1-0,5^n)u[n]$$

Kom ihåg!

Det sätt vi kör:

1. $Y(z)/z$
2. Partiellbråkuppdelning
3. Identifiera från tabellen

Exempel

Bestäm $x[n]$ om

$$X(z) = \frac{0.5z}{(z-1)(z-0.5)}$$

2. Syntetisk division metod (exempel)

$$X(z) = 3z^{-(-3)} - z^{-(-1)} + 2z^{-4}$$

$$\begin{aligned} X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} &= \cdots x[-3]z^{-(-3)} + x[-2]z^{-(-2)} + x[-1]z^{-(-1)} \\ &\quad + x[0] + x[1]z^{-1} + x[2]z^{-2} + x[3]z^{-3} \end{aligned}$$

$$x[n] = \{\cdots, 0, 3, 0, -1, \underset{\uparrow}{0}, 0, 0, 0, 2, 0, \cdots\}$$

Obs! This method doesn't produce a closed-form expression for $x[n]$

2. Syntetisk division metod

$$X(z) = \frac{z^{-r}(b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_M z^{-M})}{1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_N z^{-N}}$$

Perform long division of the numerator polynomial by the denominator polynomial to produce the quotient polynomial $q(z^{-1})$

Identify coefficients in the power series definition of $X(z)$ where

$$X(z) = z^{-r}[q(0) + q(1)z^{-1} + q(2)z^{-2} + \cdots]$$

$$r = 0 \rightarrow x[n] = q[n], \quad r \geq 0 \rightarrow x[n] = \begin{cases} 0, & 0 \leq n \leq r \\ q[n-r], & r \leq n < \infty \end{cases}$$