

Idag

1. **z-planet forts**
2. **Frekvensfunktion**
3. **Amplitud och fasfunktion**

Z-planet

Samband mellan Laplace- och z-transform

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n}$$

$$X(s) = \int_0^{\infty} x(t)e^{-st} dt$$

$$s = \sigma + j\omega$$

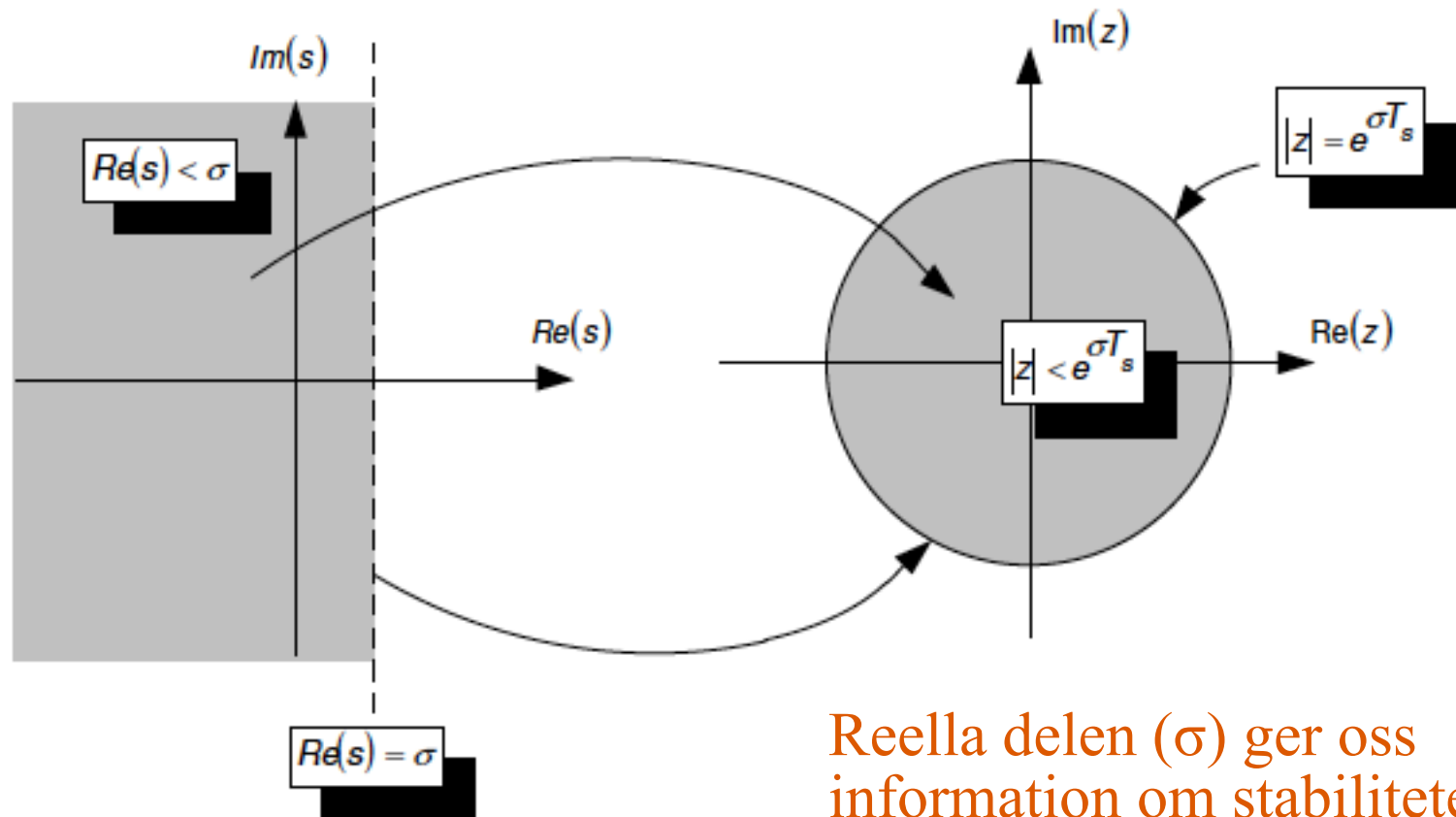
$$z = e^{sT_s}$$

$$\begin{aligned} z &= e^{sT_s} \\ &= e^{(\sigma + j\omega)T_s} = e^{\sigma T_s + j\omega T_s} \end{aligned}$$

$$= e^{\sigma T_s + j\Omega}$$

Samband mellan Laplace- och z-transform: den reella delen

$H(z)$ är en *komplexvärd* funktion av en komplex variabel



Idag ska vi titta närmare på den imaginära delen $e^{j\Omega}$

Normerade vinkelfrekvens

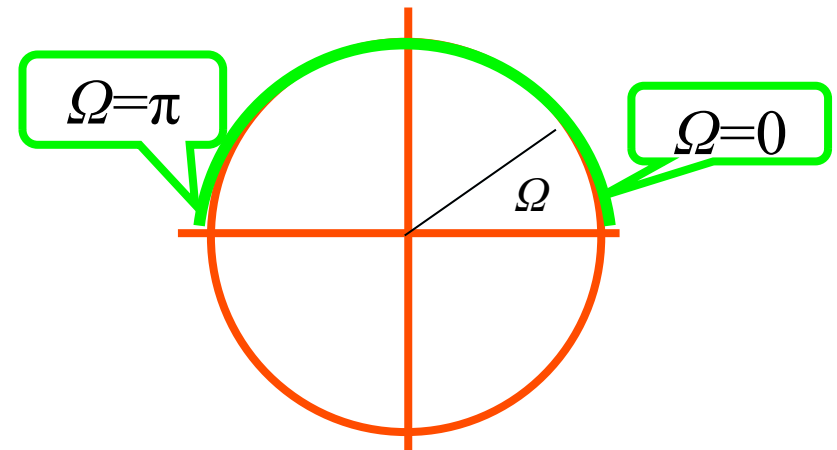
$$z = e^{\sigma T_s} e^{j\Omega}$$

$$e^{\sigma T_s + j\omega T_s} = e^{\sigma T_s + j\Omega}$$

Från definitionen

$$\Omega = 2\pi f / f_s$$

Normerade
vinkelfrekvens



är periodiskt med period

$$2\pi / T_s = 2\pi f_s$$

Nyquistteorem

$$f_s > 2^* f_{max}$$

Normerade vinkelfrekvens

Nyquistteorem

$$f_s > 2 * f_{max}$$

Tex:

Vi antas samplingsfrekvensen vara $f_s = 1$ Hz

Nyquistfrekvensen:

$$= 0.5 \text{ Hz}$$

Nyquistvinkelfrekvensen

$$= \pi \text{ rad/s}$$

Hur löser vi detta?

Använd normerad vinkelfrekvens som vanligt och korrigera på slutet.

Exempel

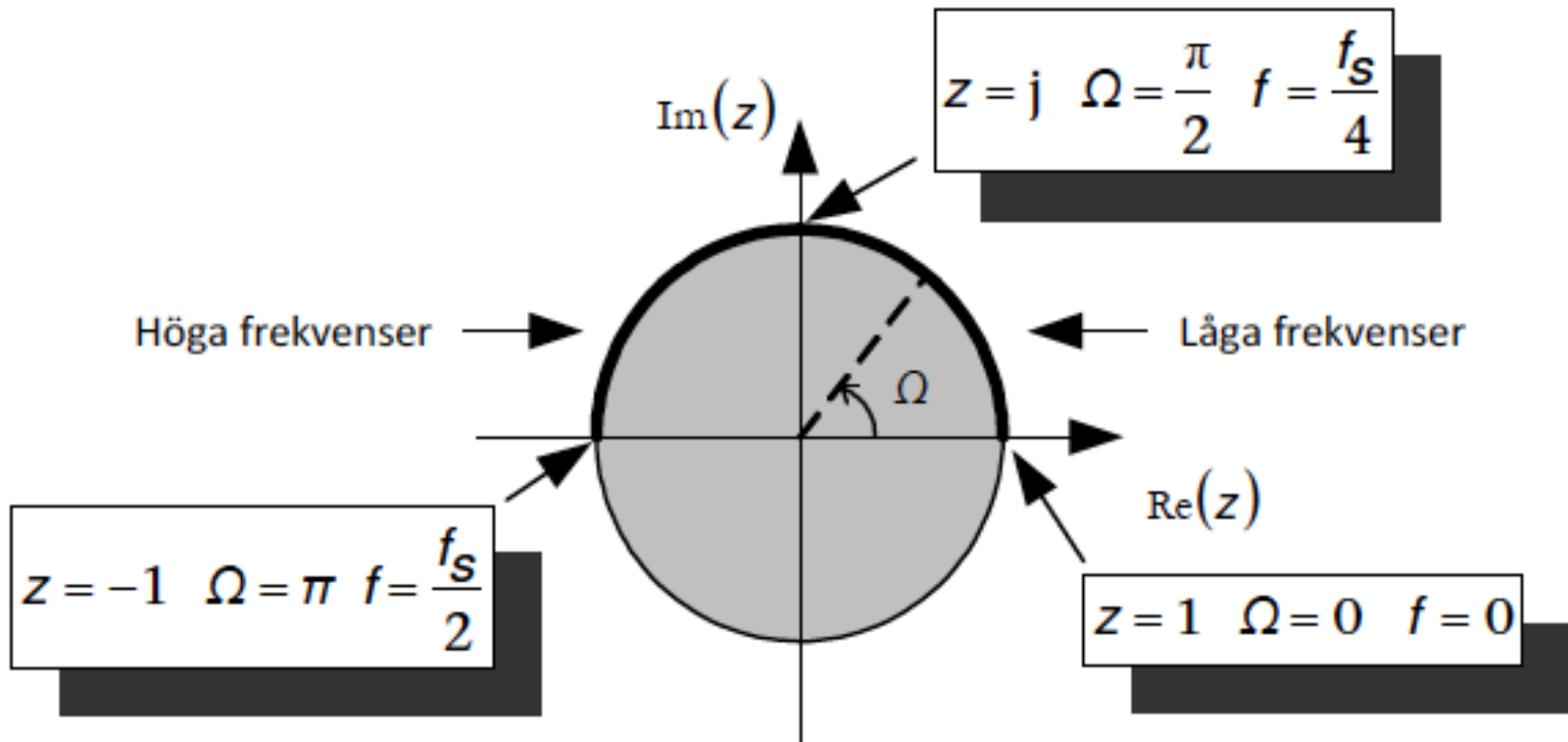
Nyquistteorem

$$f_s > 2 * f_{max}$$

Vårt tidsdiskreta filter har ett maximum för $\Omega = \pi/4$

Det svarar då mot frekvensen $f = f_s * \Omega / 2\pi = 125 \text{ Hz}$

Normerade vinkelfrekvens

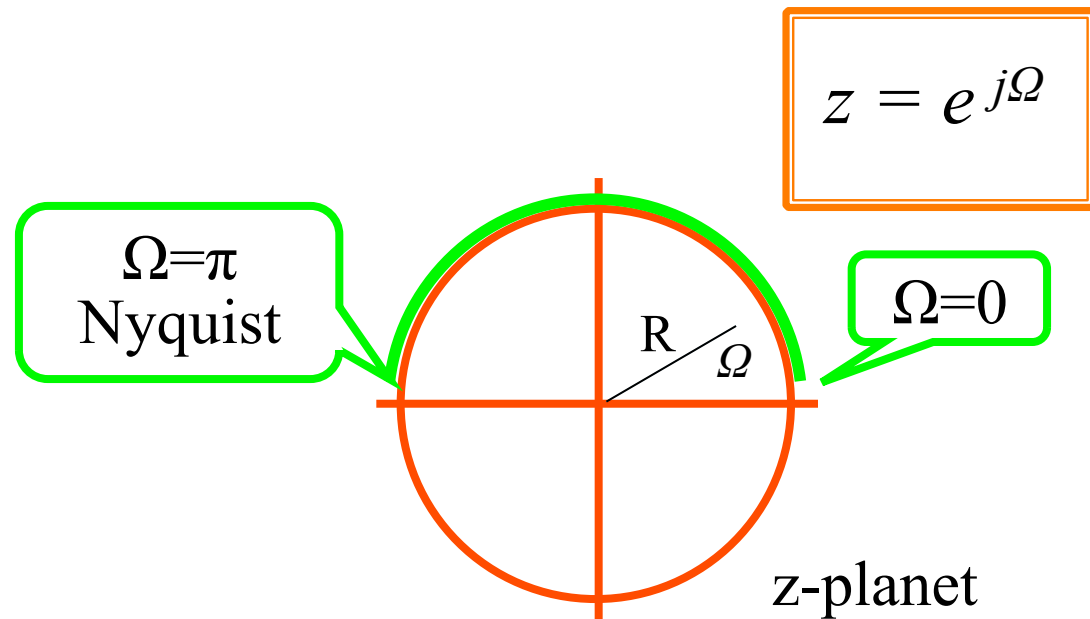


Z-transformen på enhetscirkeln

Övre halvan av enhetscirkeln är frekvensaxeln

Frekvensgången fås genom att evaluera $|H(z)|$ över enhetscirkeln: $|H(j\omega)| = |H(e^{j\Omega})|$

Värdet av $H(z)$ på enhetscirkeln vid frekvensen Ω anger *vad systemet gör med signalen vid den frekvensen*



Ω ger resonsvinkelfrekvens
 R resonansens styrka

Frekvensfunktion

$$H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})| e^{j\phi(\omega)}$$

$$H(e^{j\omega}) = \operatorname{Re}[H(e^{j\omega})] + j \operatorname{Im}[H(e^{j\omega})]$$

Amplitudfunktion

$$|H(e^{j\omega})| = \sqrt{\operatorname{Re}[H(e^{j\omega})]^2 + \operatorname{Im}[H(e^{j\omega})]^2}$$

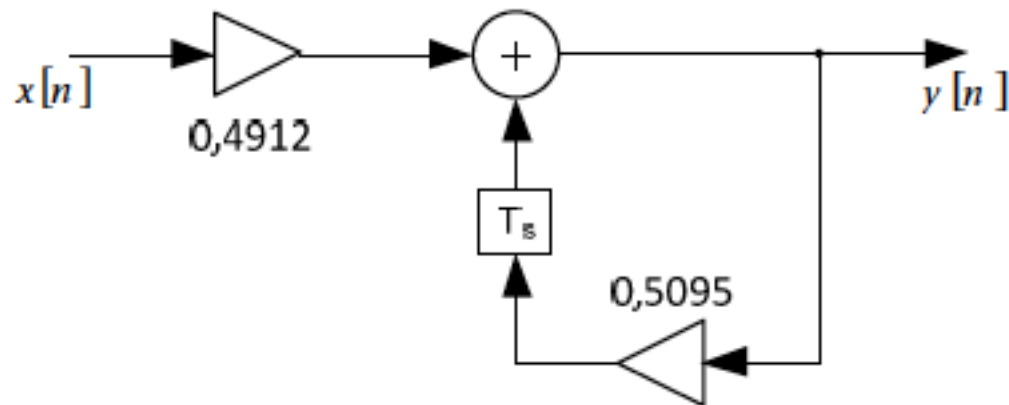
Fasfunktion

$$\phi(\omega) = \arg[H(e^{j\omega})] = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im}[H(e^{j\omega})]}{\operatorname{Re}[H(e^{j\omega})]} + \pi$$

Om vi befinner oss i $-RE(H(j\omega))$

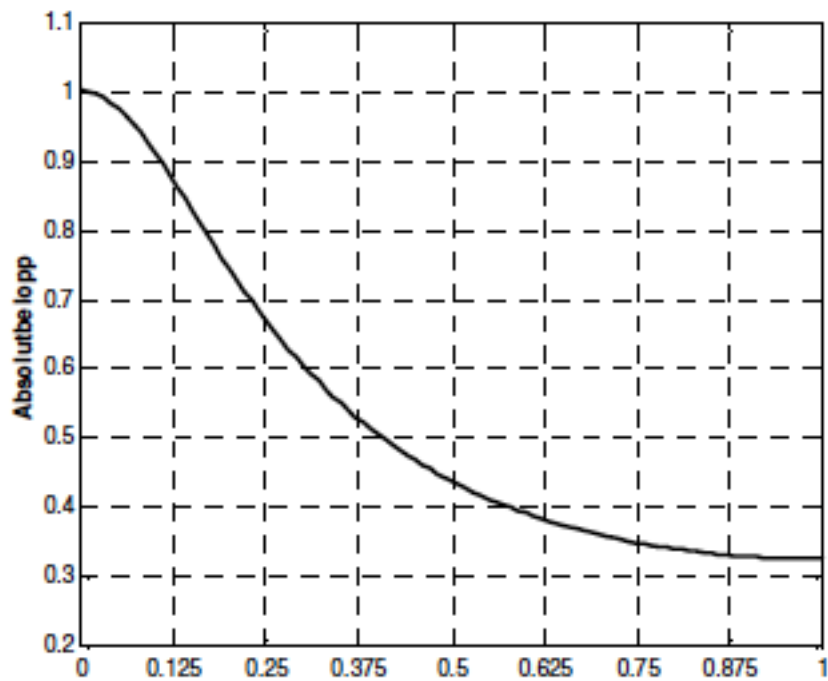
Exempel

Bestäm amplitud och fassvar för systemet beskriven av följande blockschema

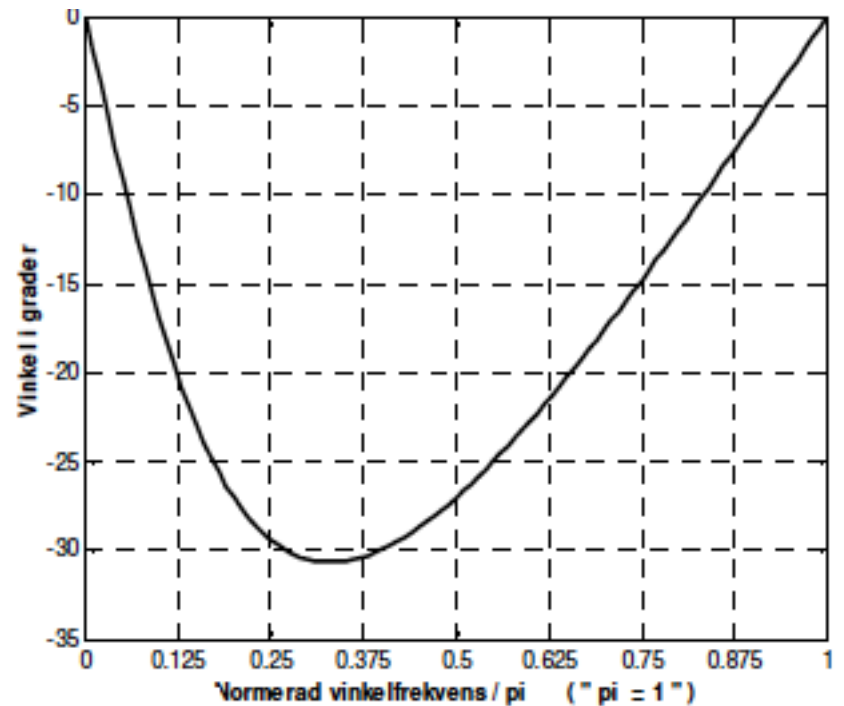


Exempel

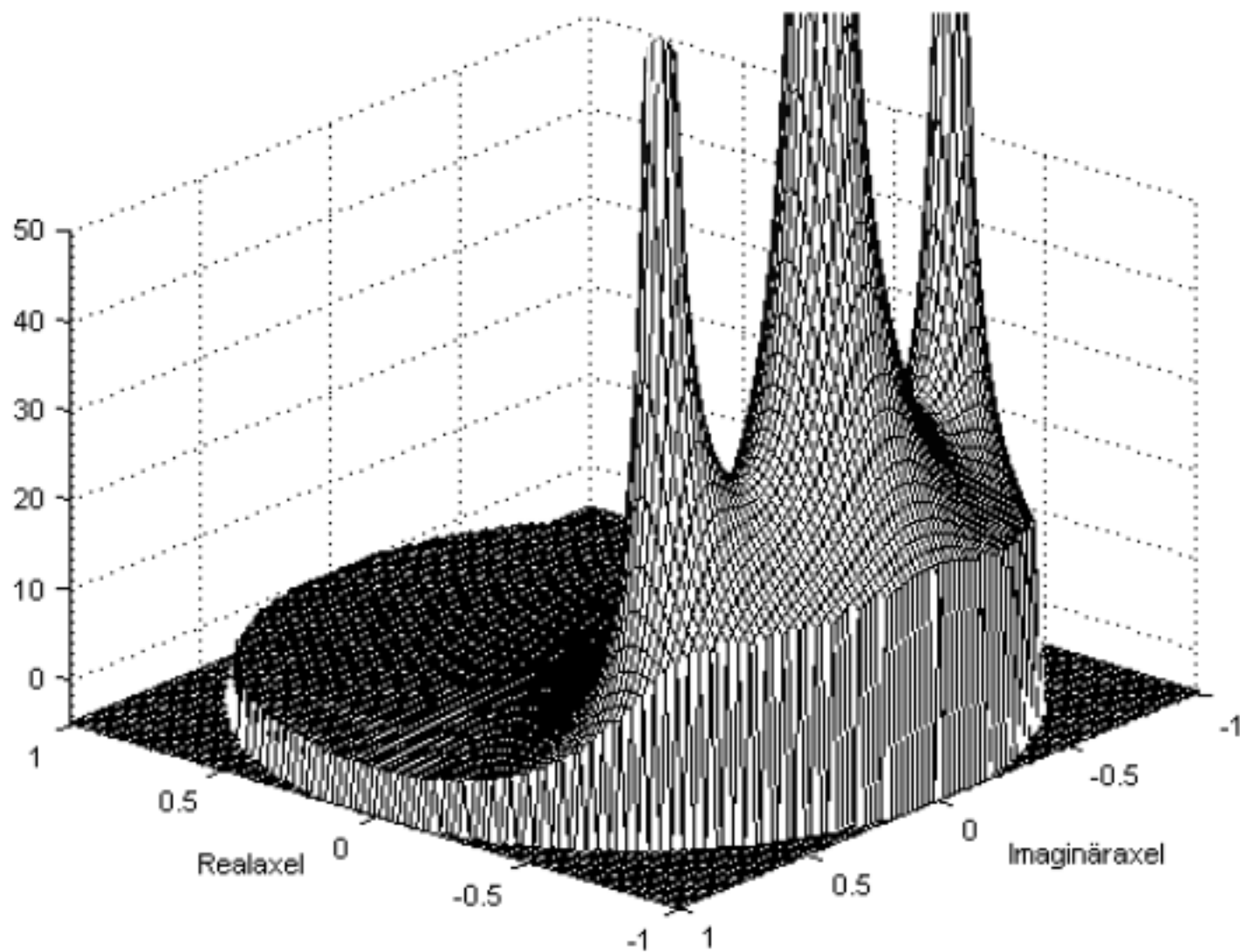
Amplitudfunktion



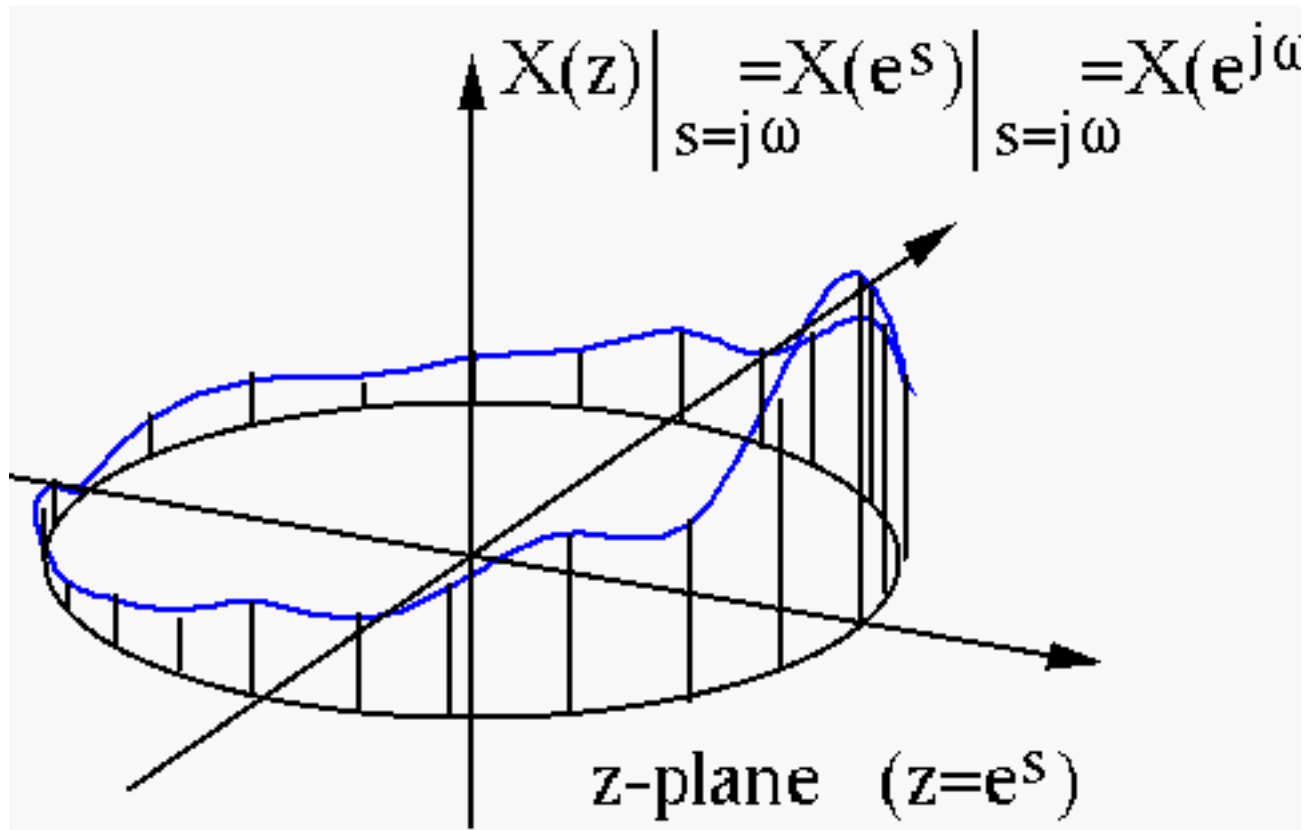
Fasfunktion



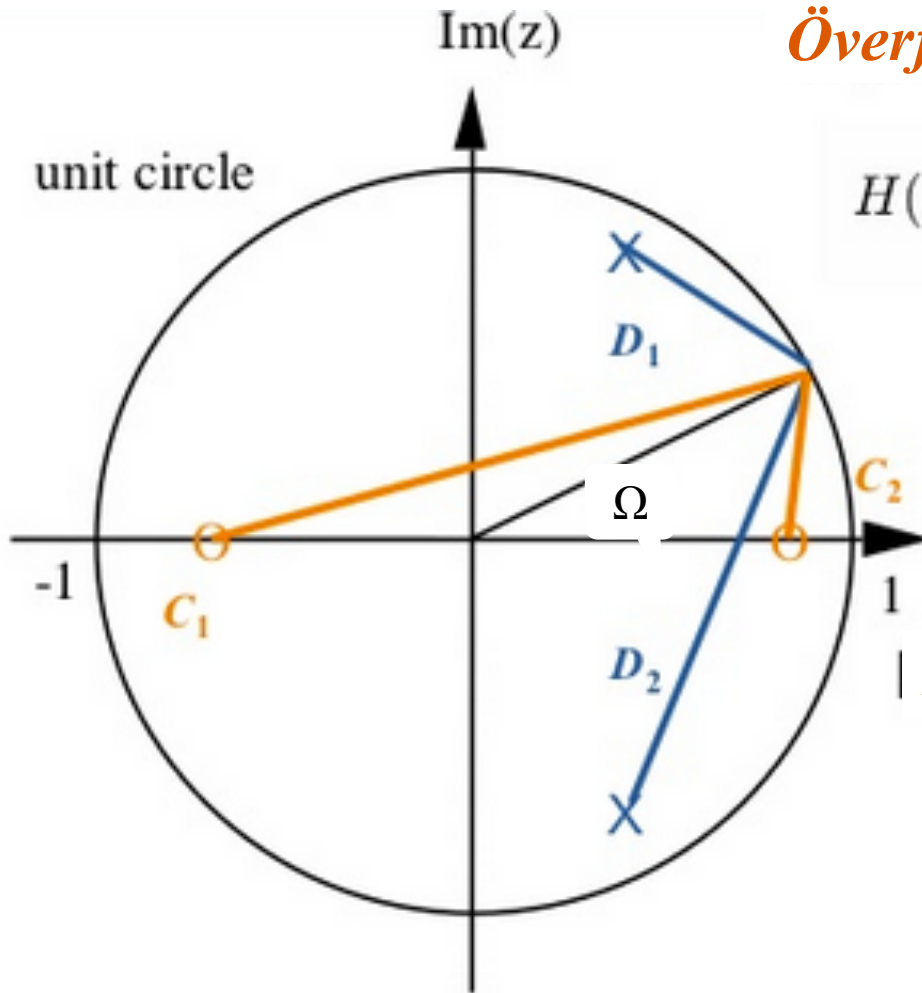
Hur ser z-planet ut?



Så bestäms frekvensfunktion



Hur bestäms frekvensfunktion utseende egentligen?



Överförningsfunktion

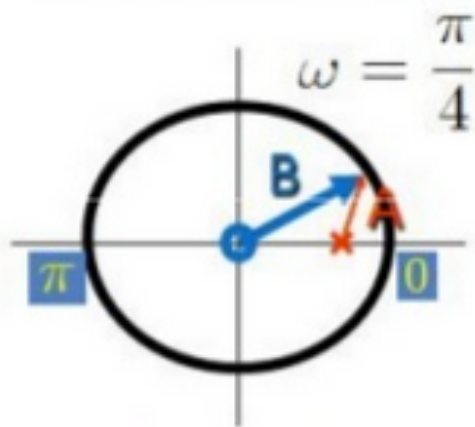
$$H(z) = b_0 \frac{\prod_{q=1}^M (1 - c_q z^{-1})}{\prod_{q=1}^N (1 - d_q z^{-1})}$$

| *Frekvenssvar*

$$\begin{aligned} H(\omega) &= H(z)|_{z=e^{j\omega}} \\ &= b_0 \frac{c_1 c_2}{d_1 d_2} \end{aligned}$$

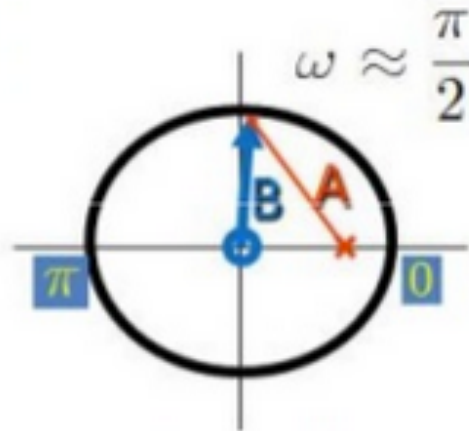
Pol- och nollställeplacering & amplitudfunktion

Pole= .8 Zero=0



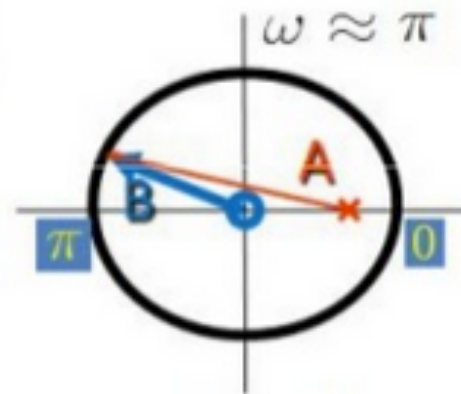
$$B > A$$

$$|H(e^{j\omega})| = \text{Low}$$



$$B \approx A$$

$$|H(e^{j\omega})| = \text{Mid}$$



$$B < A$$

$$|H(e^{j\omega})| = \text{High}$$

Pol- och nollställeplacering & amplitudfunktion

