

Idag

1. **Pol- och nollställeplacering fort.**
2. **Notchfilter**
3. **Energi & effektsignaler**
4. **Fourier serier för tidsdiskreta signaler**
5. **DTFT**

z-planet

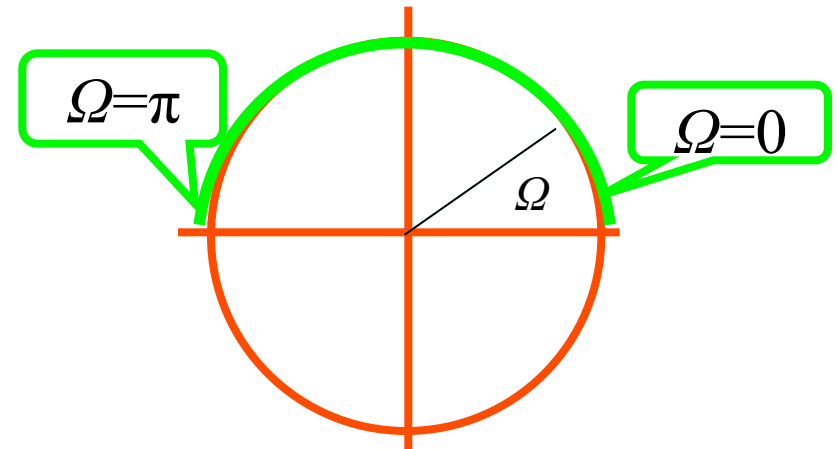
$$z = e^{\sigma T_s} e^{j\Omega}$$

Normerade vinkelfrekvens

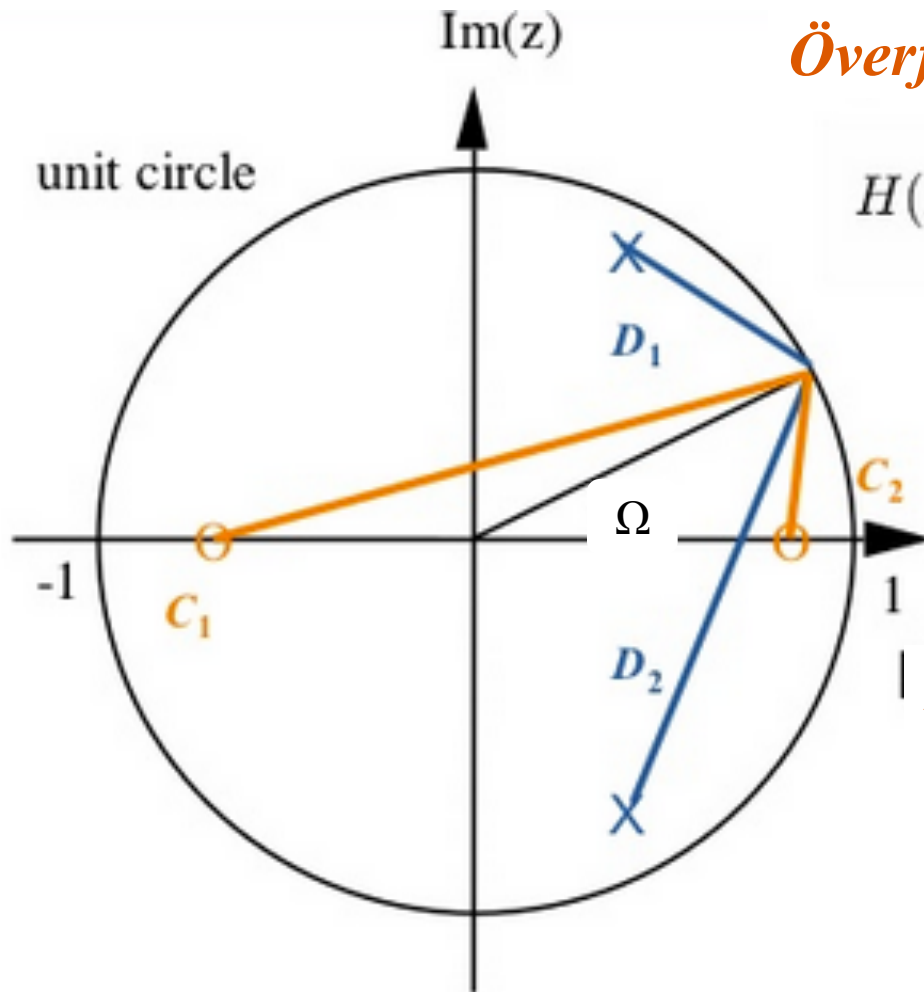
$$\Omega = 2\pi f / f_s$$

är periodiskt

$$0 < \Omega \leq \pi$$



Hur bestäms frekvensfunktionen?



Överförningsfunktion

$$H(z) = b_0 \frac{\prod_{q=1}^M (1 - c_q z^{-1})}{\prod_{q=1}^N (1 - d_q z^{-1})}$$

Frekvenssvar

$$\begin{aligned} H(\omega) &= H(z)|_{z=e^{j\omega}} \\ &= b_0 \frac{c_1 c_2}{d_1 d_2} \end{aligned}$$

Funktion av nollställe

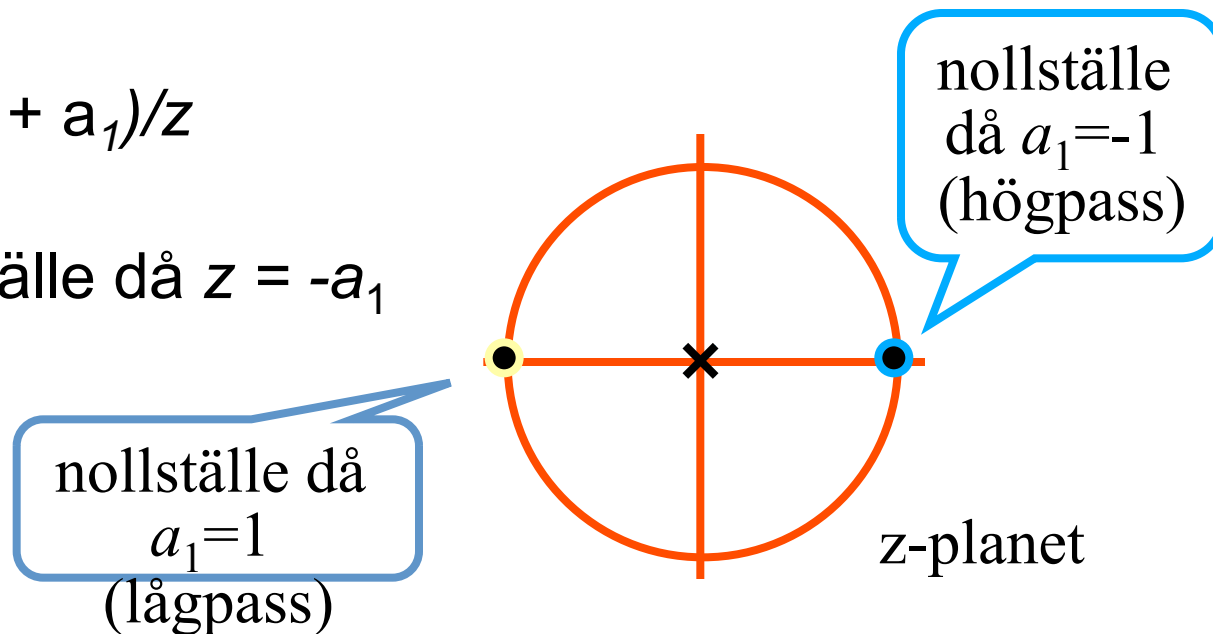
Vi kan få en bild av $H(z)$ genom att plotta dess
nollställen $H(z) = 0$

exempel:

$$y[n] = x[n] + a_1 x[n-1]$$

$$H(z) = 1 + a_1 z^{-1} = (z + a_1)/z$$

$H(z) = 0$ ger ett nollställe då $z = -a_1$



Funktion av nollställe

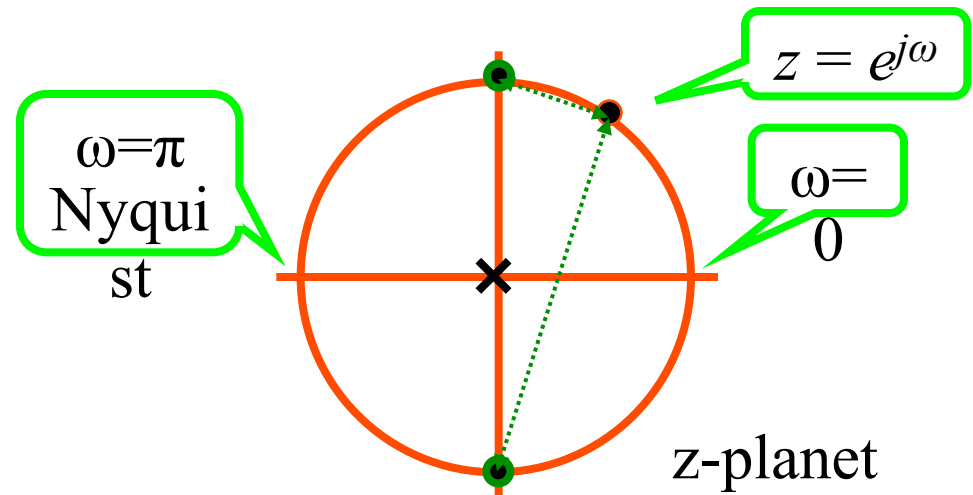
exempel:

$$y(n) = x(n) + x(n-2)$$

$$H(z) = 1 + z^{-2} = (z^2 + a_1)/z^2$$

$$H(z) = 0 \text{ ger } z = \pm j$$

$$|H(\omega)| = |e^{-j\omega} - j| |e^{-j\omega} + j|$$

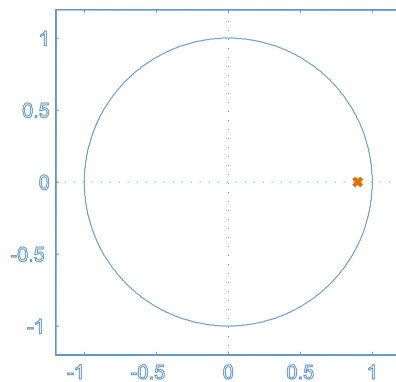
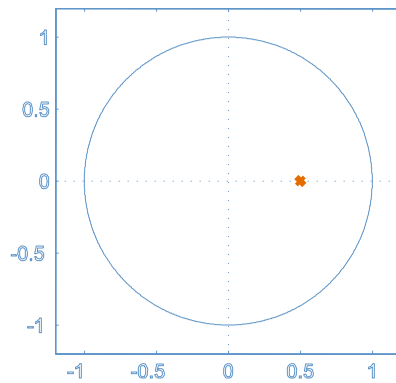


Frekvensfunktion: pol- och nollställeplacering

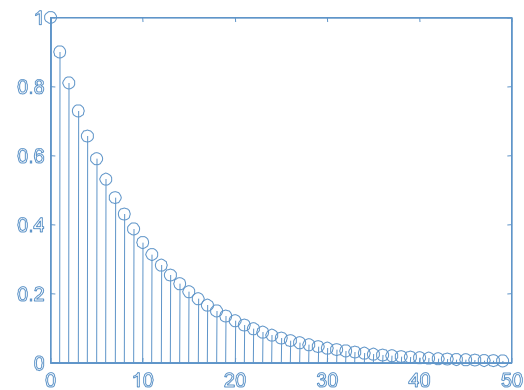
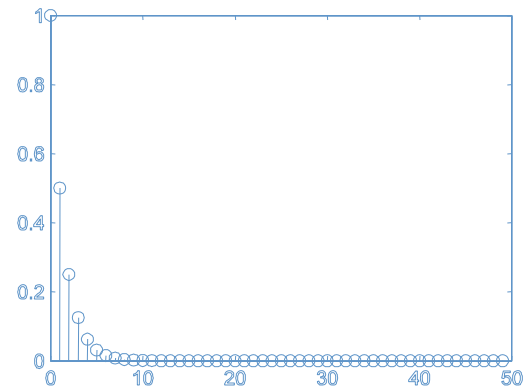
<http://www.earlevel.com/main/2003/02/27/pole-zero-placement/>

Polplacering

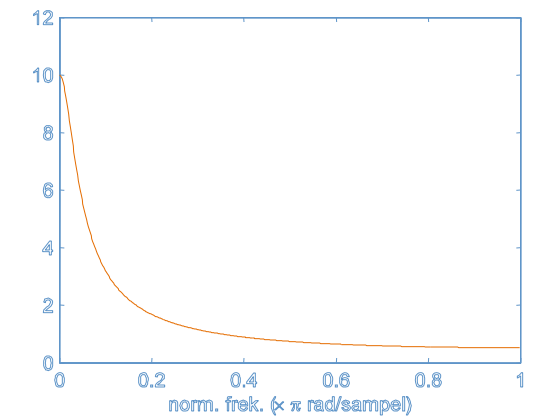
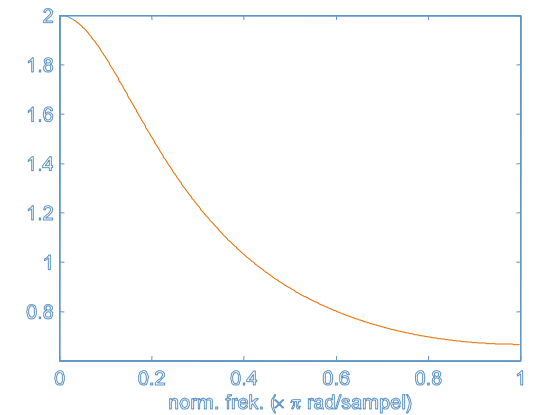
Poler
z-planet



Impulssvar
tidsdomän



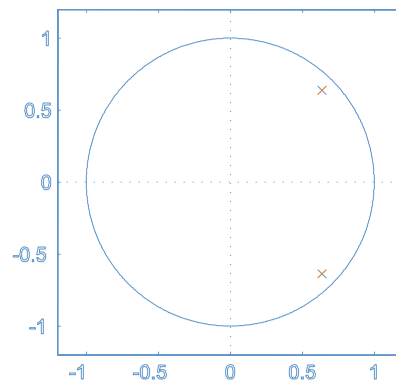
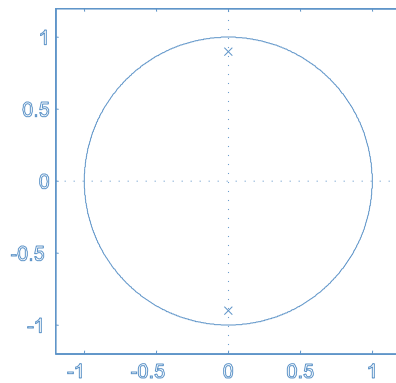
Frekvenssvar
frekvensdomän



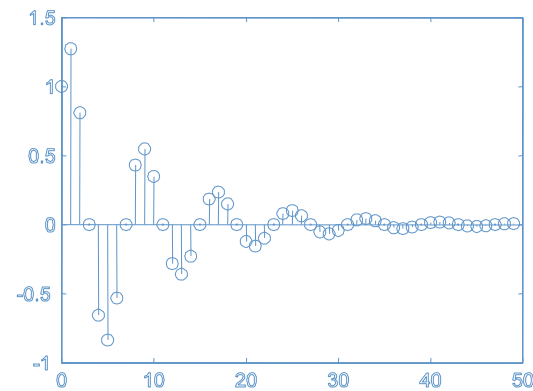
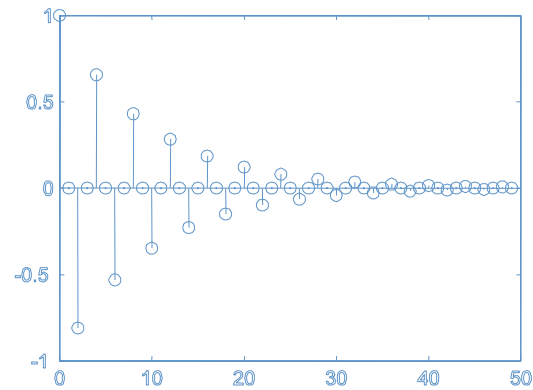
$$h[n] = a^n$$

Polplacering

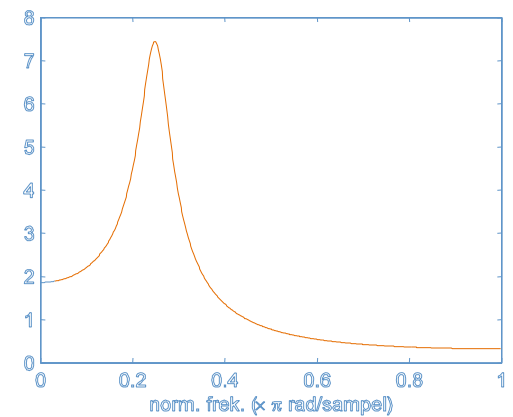
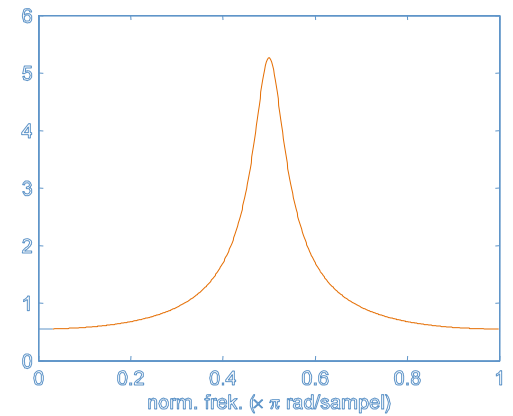
Poler
z-planet



Impulssvar
tidsdomän



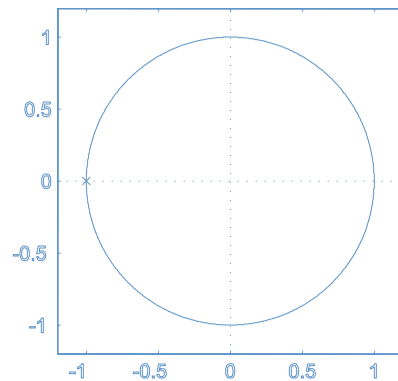
Frekvenssvar
frekvensdomän



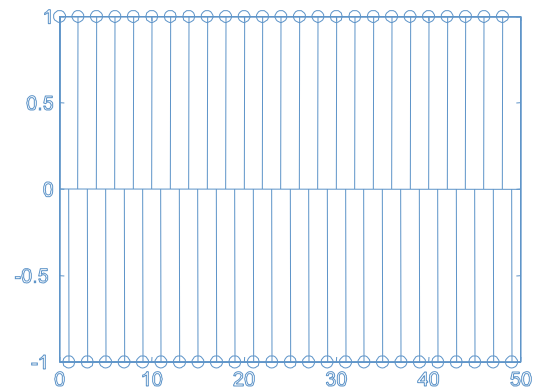
$$h[n] = a^n \cos(n)$$

Polplacering

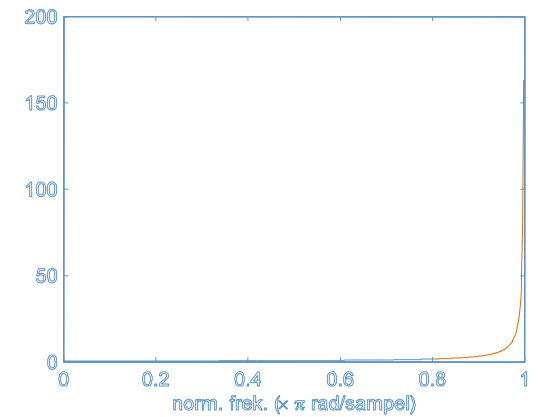
Poler
z-planet



Impulssvar
tidsdomän



Frekvenssvar
frekvensdomän



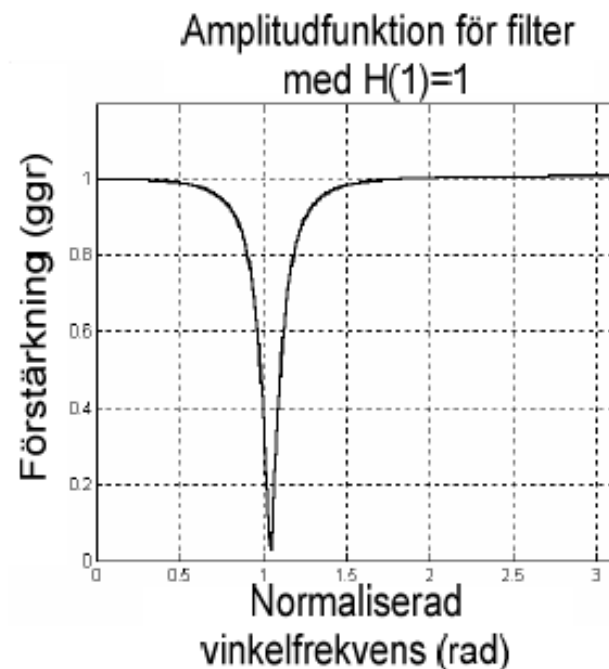
$$h[n] = (-1)^n$$

Notch filter: pol- och nollställeplacering

En så kallad Notchfilter med
samplingsfrekvensen 18kHz har
överföringsfunktion

$$H(z) = \frac{z^2 + z + 1}{z^2 + 0.8z + 0.64}$$

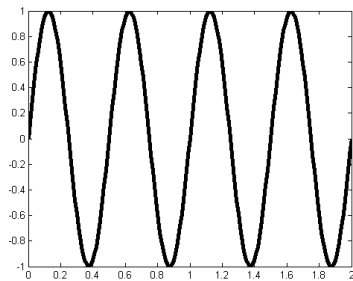
Vilken frekvens släcks ut av filtret?



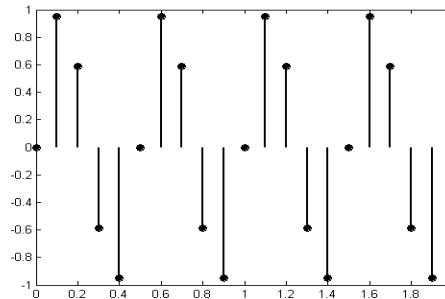
Energi & effekt signal

Klasificering av signaler i tidsplanet (påminnelse)

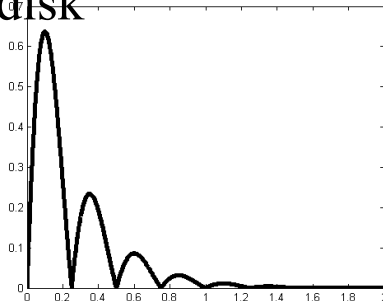
Tidskontinuerlig
Periodisk



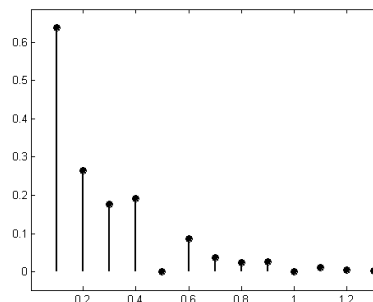
Tidsdiskret
Periodisk



Tidskontinuerlig
Icke- Periodisk



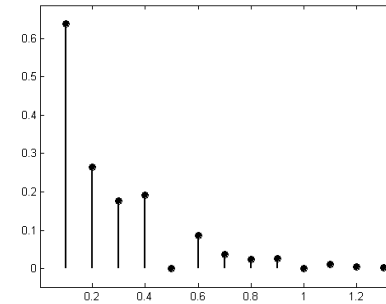
Tidsdiskret
Icke-Periodisk



Energi & effektsignal (påminnelse)

Energisignal

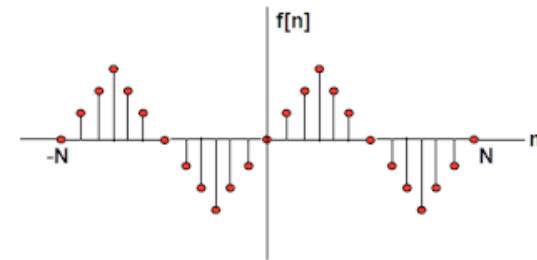
$$E_{\infty} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 \quad \begin{array}{l} E < \infty \\ P = 0 \end{array}$$



Bara energisignaler kan representeras med Fouriertransformen.

Effektsignal

$$P_{\infty} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N |x[n]|^2 \quad \begin{array}{l} 0 < P < \infty \\ E = \infty \end{array}$$



Bara effektsignaler kan representeras med Fourierserie

Några energi och effekt- signaler

<http://demonstrations.wolfram.com/EnergyAndPowerOfSignals/>

Fouriertransform i diskret tid (DTFT)

Fourier transformer: koncept

Alla signaler kan delas upp i en summa av sinusformade komponenter

Transformer översätter mellan tids- och frekvensdomän

Med en signals *spektrum* avses fouriertransformen, ofta i belopp

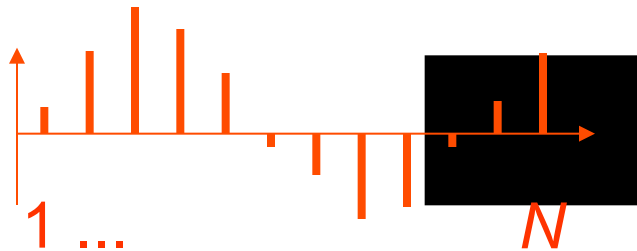
F.T. är mycket väl nyttjad i DSP tack vare den snabba FFT-algoritmen

Fourier transformer: koncept

En transform är en *viktad summa av basvektorer*

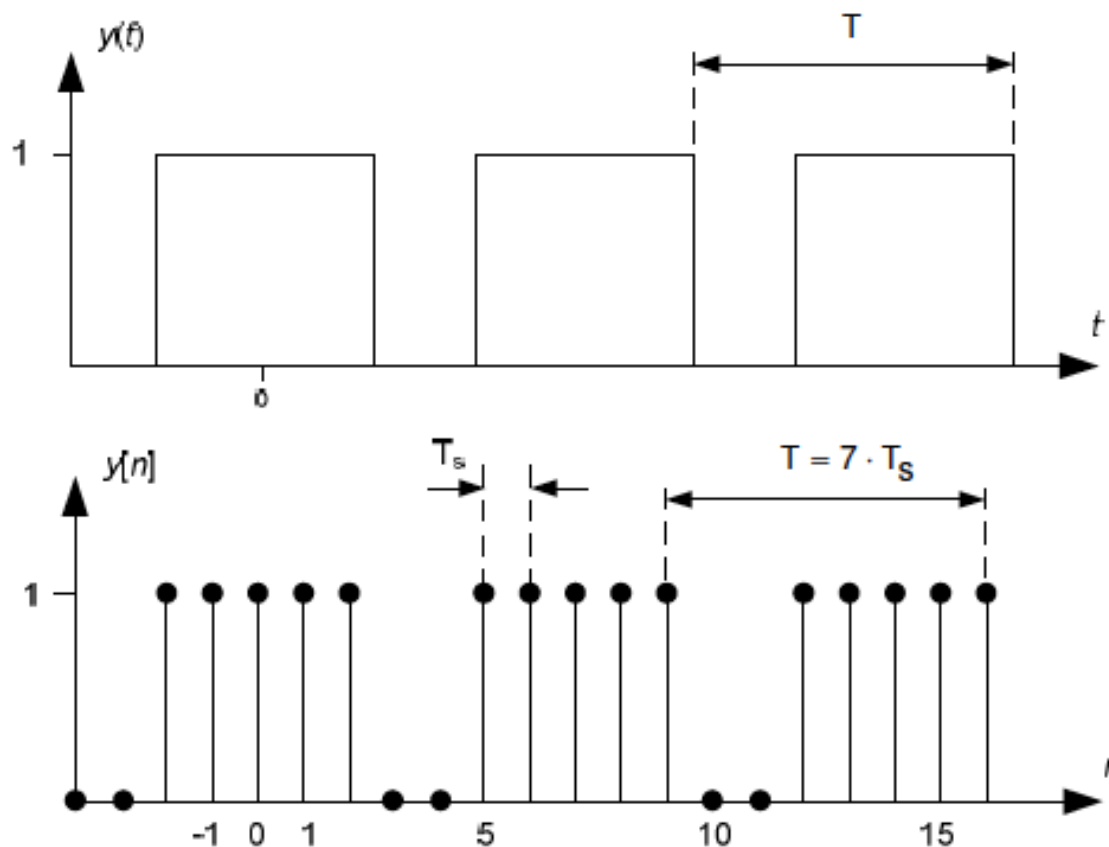
Rymderna – eller domänerna – som vi transformerar från och till kan ha *godtyckligt* många dimensioner.

exempel:
en samplad ljudsignal med N värden



kan betraktas som en *punkt* i en N -dimensionell tidsdomän

Samplad periodisk effektsignal



$x[n]$ med periodlängden N , tillhör det rum som spänns upp av basvektorer

$$e_k[n] = e^{jk\Omega_0 n} \quad k=0,1,2,\dots,N-1$$

Fourier serier

En diskret periodisk effektsignal, $x[n]$ med periodlängden N , kann skrivas som

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{jk\Omega_0 n}$$

där

$$c_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-jk\Omega_0 n} \quad k=0,1,2,\dots,N-1$$

Och Ω_0 är den normerade grundvinkelfrekvensen

$$\Omega_0 = \frac{2\pi f_0}{f_s} = \frac{2\pi}{N}$$

Det är ju en Fourier serie!

Fourier serier

Beloppet $|c_k|$ ger signalens spektrum

Spektrumlutningen ger ett mått på jämnheten i signalen

för fyrkantvåg avtar spektrum med $1/n$

för triangelvåg avtar spektrum med $1/n^2$

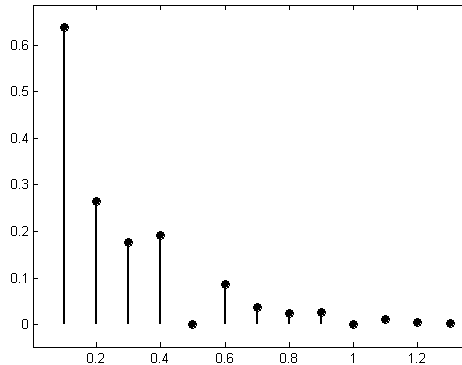
Integrering i tidsdomänen ökar spektrumlutningen,
derivering minskar den

Diskontinuiteter i insignalen orsakar "ringningar" (Gibbs fenomen)

Exempel: Fourier serier

Samplad periodisk energisignal

Fourier transform i diskret tid (DTFT)



analys

$$Y(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n] e^{-jn\Omega}$$

syntes

$$y[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} Y(\Omega) e^{j\Omega n} d\Omega$$

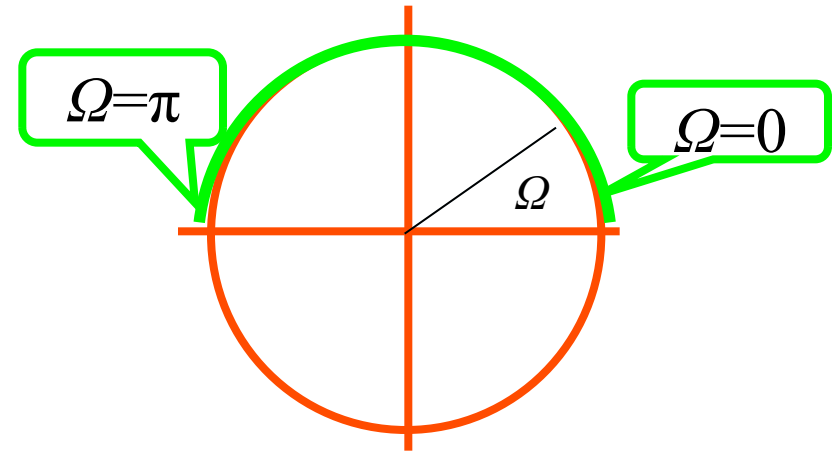
Z- & Fourier transformen

$$z = e^{\sigma T_s} e^{j\Omega}$$

Normerade vinkelfrekvens

$$\Omega = 2\pi f / f_s$$

$$0 < \Omega \leq \pi$$



Att bestämma
frekvenssvar

$$z = e^{j\Omega}$$

Fourier transform i diskret tid
DTFT

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n}$$

$$X(\Omega) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n]e^{-jn\Omega}$$

Express $H(z)$ in
 $1/z$ cross
multiply and
take inverse

