

Komplexa tal: olika form

Det viktigaste från sista gången

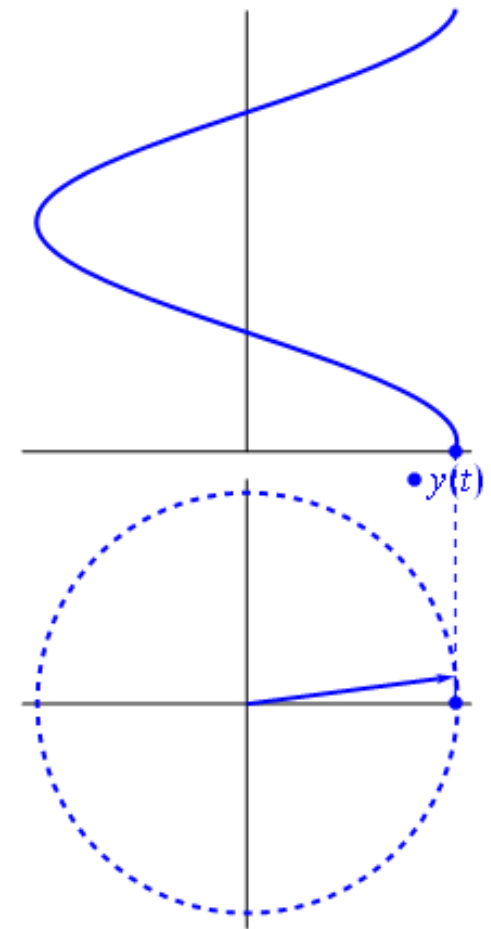
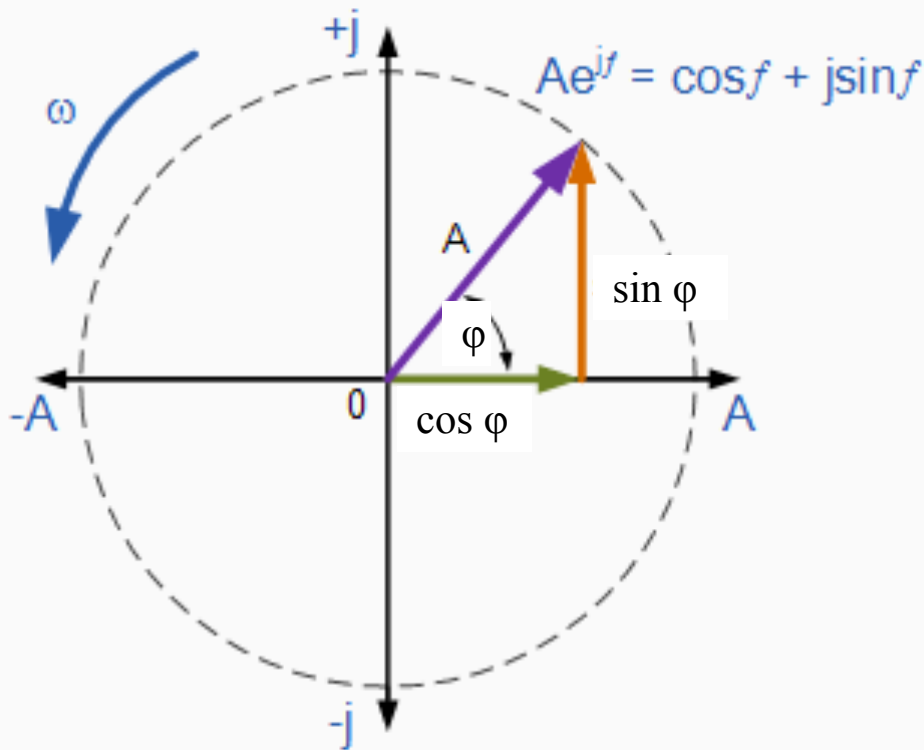
Polar

Exponential

$$Z = x + jy = A \angle \varphi = A (\cos \varphi + j \sin \varphi) = A e^{j\varphi}$$

Rectangular

Euler's identity



Eulers formel

Det viktigaste från sista gången

$$\begin{aligned} e^{jx} &= \cos x + j \sin x \\ e^{-jx} &= \cos x - j \sin x \end{aligned} \longrightarrow \begin{cases} e^{jx} + e^{-jx} = 2 \cos x \\ e^{jx} - e^{-jx} = 2j \sin x \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos x = \frac{1}{2} (e^{jx} + e^{-jx}) \\ \sin x = \frac{1}{2j} (e^{jx} - e^{-jx}) \end{cases}$$

Moivres formel

$$(\cos x + j \sin x)^n = \cos nx + j \sin nx$$

Beskrivning av (analog) signaler

Idag

1. **Egenskaper**
2. **Signaler vi använder**
3. **Signaltransformationer**

Analoga vs Diskreta signaler

Continuous-Time Signals

Most signals in the real world are continuous time, as the scale is infinitesimally fine.

E.g. voltage, velocity,

Denote by $x(t)$, where the time interval may be bounded (finite) or infinite

Discrete-Time Signals

Some real world and many digital signals are discrete time, as they are sampled

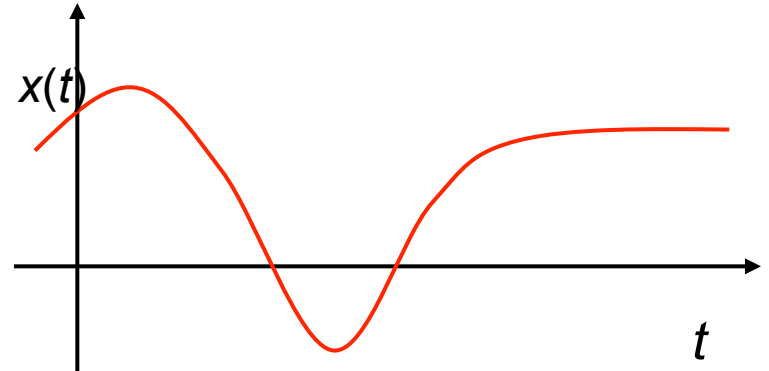
E.g. pixels, daily stock price (anything that a digital computer processes)

Denote by $x[n]$, where n is an integer value that varies discretely

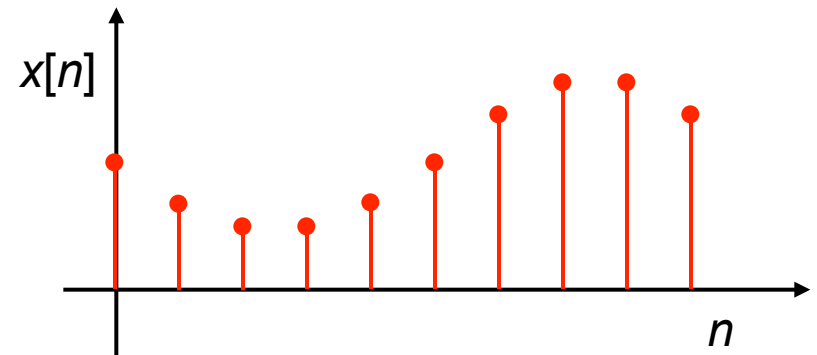
Sampled continuous signal

$$x[n] = x(nk)$$

LV 1-5



LV 6-7



Signalegenskaper

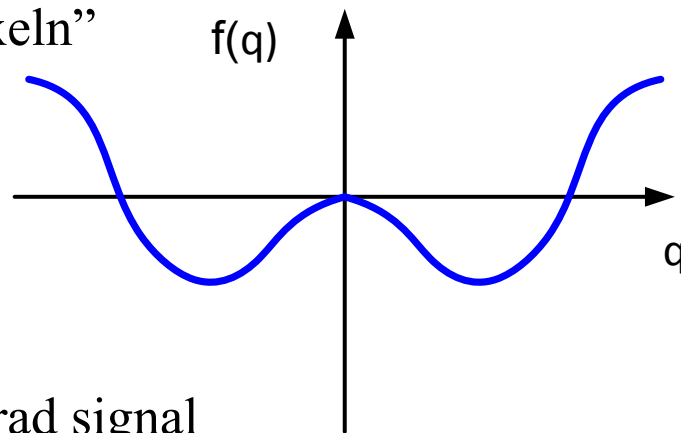
Udda och jämna signaler

en **jämn** signal är

identisk till dess tidsreverserad signal

“är symmetrisk underspeglning i y-axeln”

$$x(-t) = x(t)$$

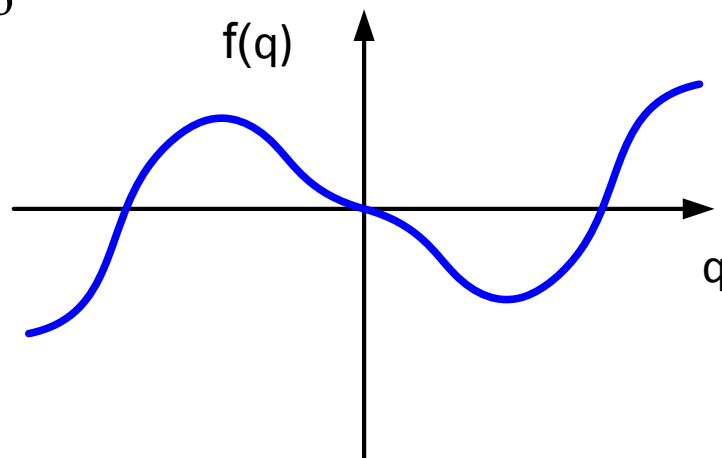


en **udda** signal är

identisk till dess negativ tidsreverserad signal

“symmetrisk under 180° kring origo”

$$x(-t) = -x(t)$$



Viktigt: varje signal uttryckas som summan av en udda och en jämn signal

Udda och jämna signaler

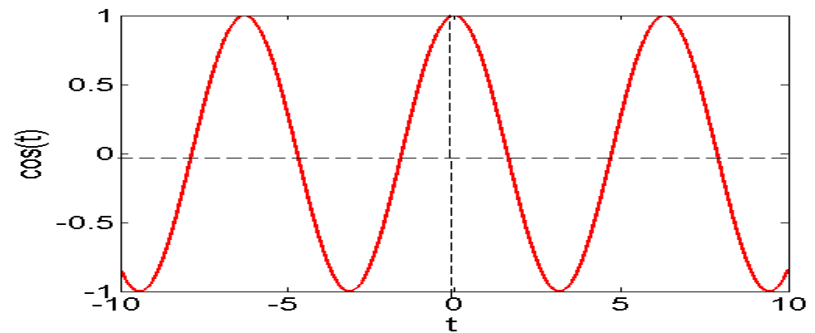
Exempel på en jämn signal

$$x(t) = \cos(t)$$

$$x(t) = c$$

$$x(t) = x^2$$

$$x(-t) = x(t)$$



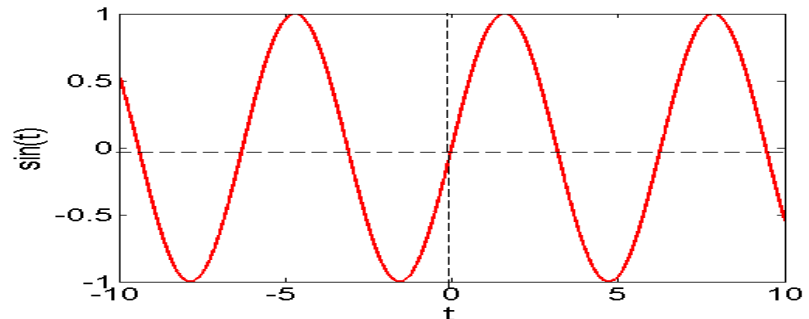
Exempel på en udda signal

$$x(t) = \sin(t)$$

$$x(t) = t$$

$$x(t) = x^3$$

$$x(-t) = -x(t)$$



Checkpoint

Bevisa att följande funktion är udda

$$x(t) = t^3 - 3t$$

Periodiska signaler

en tidskontinuerlig signal $x(t)$, som har egenskapen

$$x(t) = x(t + T) \quad T > 0, \text{ for all } t.$$

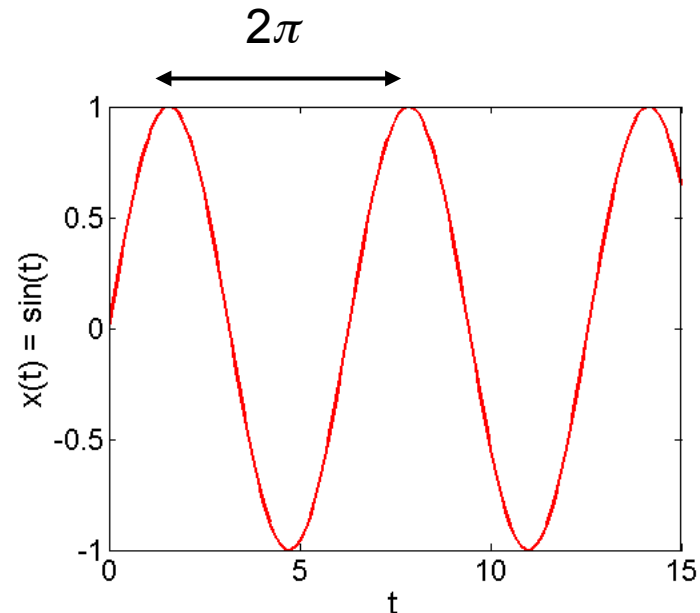
Period T är konstanten

Grundperiod T_0 Är lägsta värde av period T

$$\cos(t + 2\pi) = \cos(t)$$

$$\sin(t + 2\pi) = \sin(t)$$

“Periodisk med period 2π ”



Periodiska signaler

Bestäm period av:

$$f(t) = \cos \frac{t}{3} + \cos \frac{t}{4}$$

Periodiska signaler

Bestäm period av:

$$f(t) = \cos \frac{t}{3} + \cos \frac{t}{4}$$

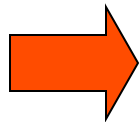
Lösning

$$f(t) = f(t + T) \longrightarrow \cos \frac{t}{3} + \cos \frac{t}{4} = \cos \frac{1}{3}(t + T) + \cos \frac{1}{4}(t + T)$$

$$\cos \theta = \cos(\theta + 2m\pi)$$

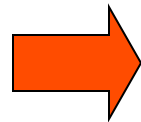
$$\frac{T}{3} = 2m\pi$$

$$\frac{T}{4} = 2n\pi$$



$$T = 6m\pi$$

$$T = 8n\pi$$



$$T = 24\pi \text{ smallest } T$$

Periodiska signaler

Bestäm period av:

$$f(t) = \cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t$$

Lösning

$$f(t) = f(t + T) \quad \longrightarrow \quad \cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t = \cos \omega_1 (t + T) + \cos \omega_2 (t + T)$$

$$\omega_1 T = 2m\pi$$

$$\omega_2 T = 2n\pi$$



$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{m}{n}$$



$$\frac{\omega_1}{\omega_2}$$

måste vara ett
rational nummer

Periodiska signaler

Bestäm period av:

$$f(t) = \cos 10t + \cos(10 + \pi)t$$

Lösning

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{10}{10 + \pi}$$

Ej rational
nummer

Icke periodiskt



Signaler vi använder...

Exponentialfunktioner med komplexa argument

$$x(t) = Ce^{at}$$

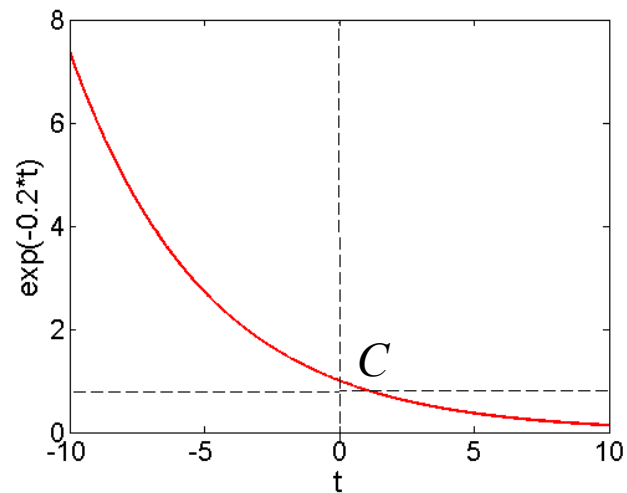
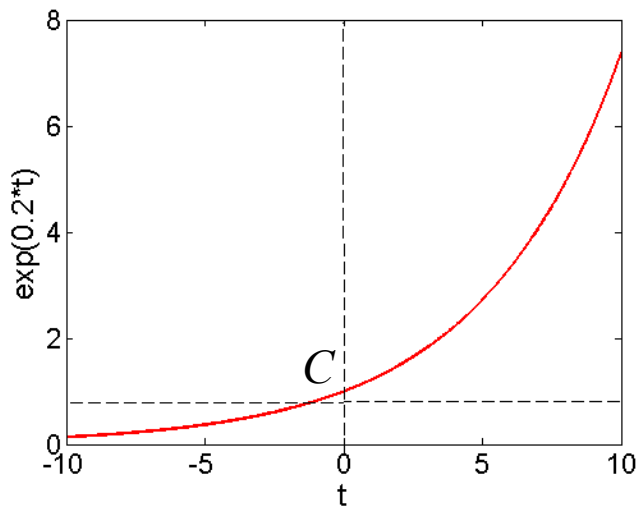
Både C och a är, generellt, komplexa tal

(I) C och a reella

Reel exponential signal

$$a > 0$$

$$C > 0$$



$$a < 0$$

$$C > 0$$

Exponentialfunktioner med komplexa argument

(II) C komplex, a rent imaginär

$$x(t) = Ce^{at} \quad C = Ae^{j\phi}$$

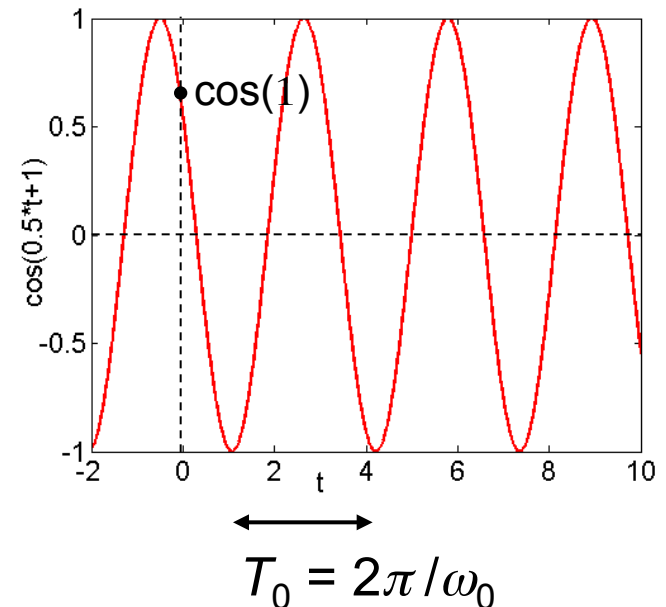
$$x(t) = Ae^{j\phi} e^{j\omega_0 t} = Ae^{j(\omega_0 t + \phi)}$$

Eulers relation

$$e^{j\omega_0 t} = \cos \omega_0 t + j \sin \omega_0 t$$

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi) + jA \sin(\omega_0 t + \phi)$$

$$\omega_0 = 2\pi f_0$$



Exponentialfunktioner med komplexa argument

(II) C komplex, a rent imaginär

sinusoid

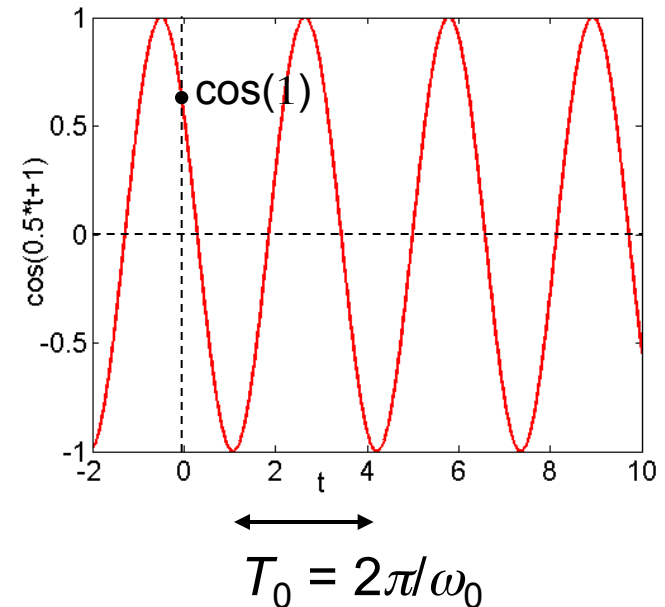
Periodiskt signal

$$\begin{aligned} e^{j\omega_0(t+T)} &= \cos \omega_0(t+T) + j \sin \omega_0(t+T) \\ &= \cos \omega_0 t + j \sin \omega_0 t = e^{j\omega_0 t} \end{aligned}$$

Vi kan alltid använda:

$$x(t) = \cos(\omega_0 t + \phi) \quad \omega_0 = 2\pi f_0$$

T_0 fundamental period
 ω_0 fundamental frekvens



$$\begin{aligned} A \cos(\omega_0 t + \phi) &= A \Re(e^{j(\omega_0 t + \phi)}) \\ A \sin(\omega_0 t + \phi) &= A \Im(e^{j(\omega_0 t + \phi)}) \end{aligned}$$

Exponentialfunktioner med komplexa argument

(III) både C och a komplexa

Låt oss uttrycka C i polär form and a in rectangulär form:

$$C = |C|e^{j\phi}$$

polär form

$$a = r + j\omega_0$$

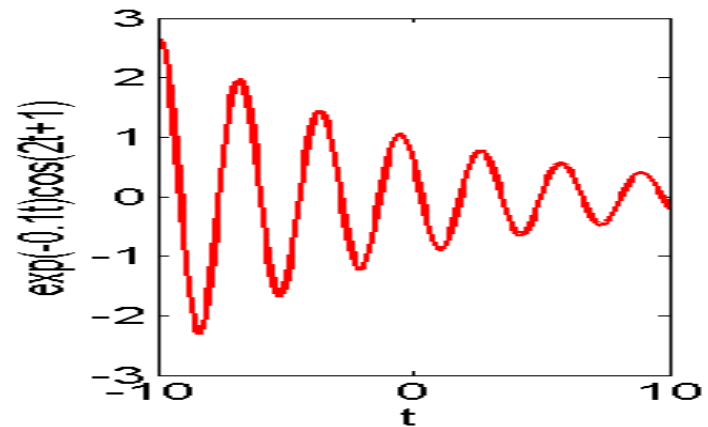
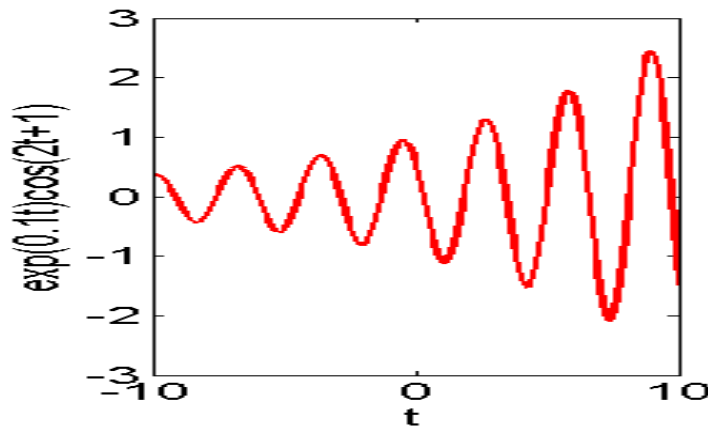
rectangulär form

$$Ce^{at} = |C|e^{j\phi}e^{(r+j\omega_0)t} = |C|e^{rt}e^{j(\omega_0+\phi)t}$$

genom Eulers relation

$$Ce^{at} = |C|e^{j\phi}e^{(r+j\omega_0)t} = |C|e^{rt} \cos((\omega_0 + \phi)t) + j|C|e^{rt} \sin((\omega_0 + \phi)t)$$

Dämpade sinusoid



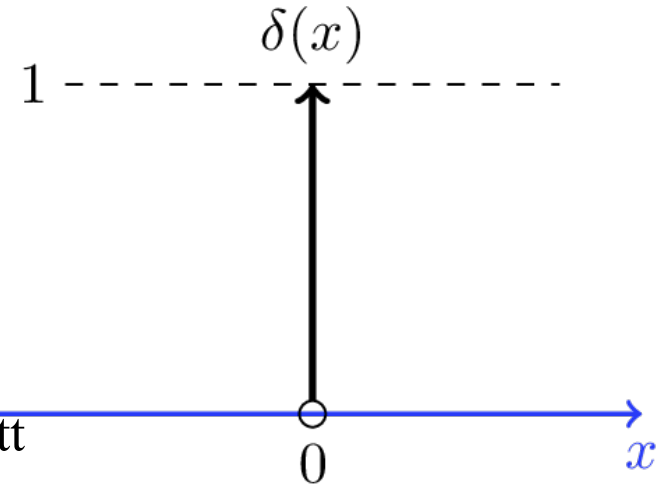
Singularity funktioner

Implusfunktion (Delta-funktionen)

$$x(t) = \delta(t) = \begin{cases} 0 & t \neq 0 \\ \infty & t = 0 \end{cases}$$

Observera att det är diskontinuerligt vid $t = 0$

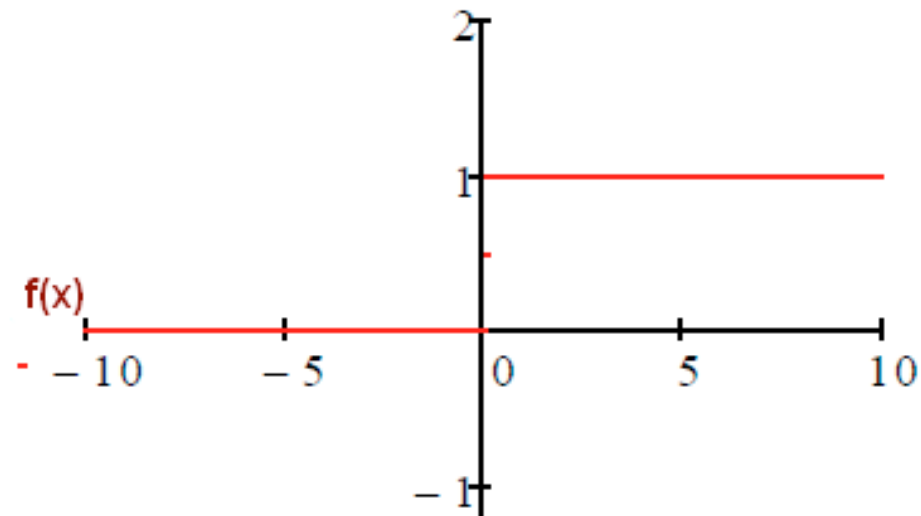
Pilen används för att beteckna området, snarare än ett faktiskt värde



Stegfunktion (Trappfunktion)

$$x(t) = u(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau$$

$$x(t) = u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$



Checkpoint

Rita en signal:

$$x(t) = t u(t)$$

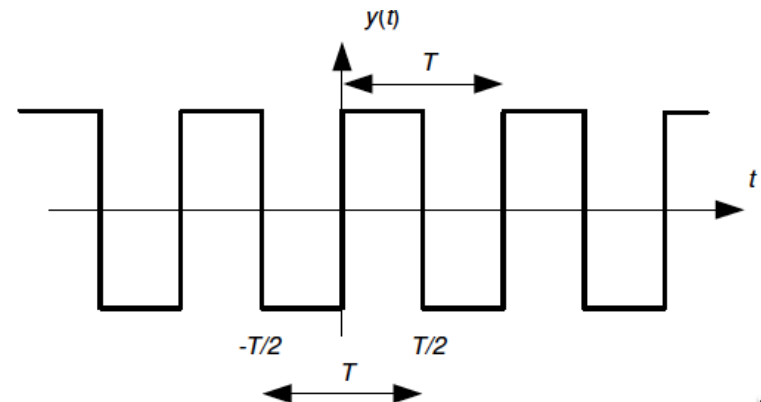
Signaler vi använder...

Vi har inte hunnit detaljer denna gången,
Vi tar det vid föreläsning om Fouriertransform

Ett annat sätt att dela signaler:

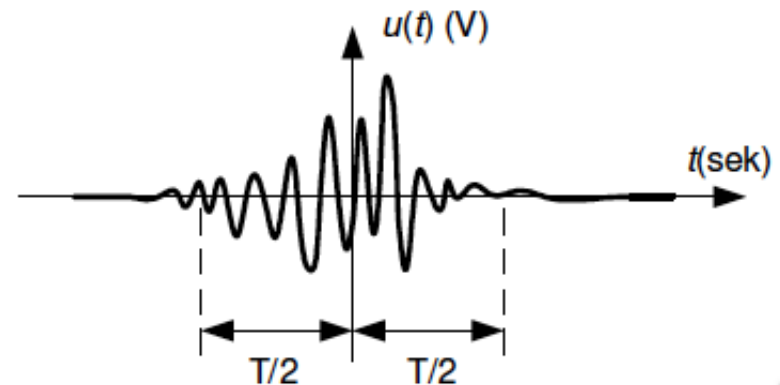
Effektsignal

signal med ändlig effekt
tex periodiska signaler



Energisignal

signal med ändlig energi
tex transienter



Tip: energisignal går mot 0 i båda oändligheterna

Signaltransformationer

Signal transformationer

Ett centralt begrepp i signalanalys är omvandlingen av en signal till en annan signal.

Av särskilt intresse är enkla transformationer som innebär omvandling endast över amplitud- eller tidsaxel

Amplitud

$$y(t) = Ax(t) + x_0$$

Tid

$$y(t) = x(at + t_0) = x(a(t + t_0 / a))$$

Signal transformationer: amplitud

Translation

$$y(t) = x(t) + x_0$$

Negation

$$y(t) = -x(t)$$

Skalning

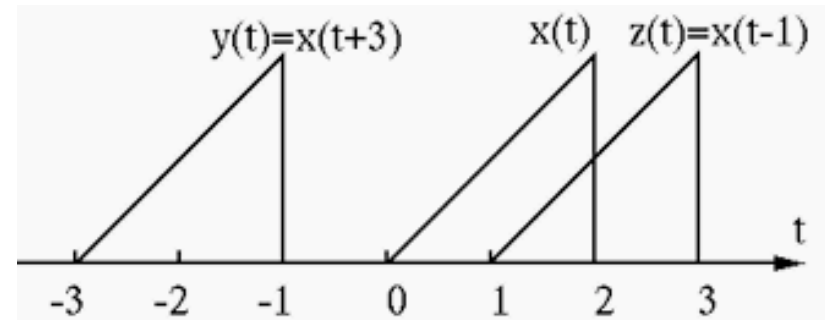
$$y(t) = ax(t)$$

Signal transformationer: tid

$$y(t) = x(at + t_0) = x(a(t + t_0 / a))$$

Tidskift (translation)

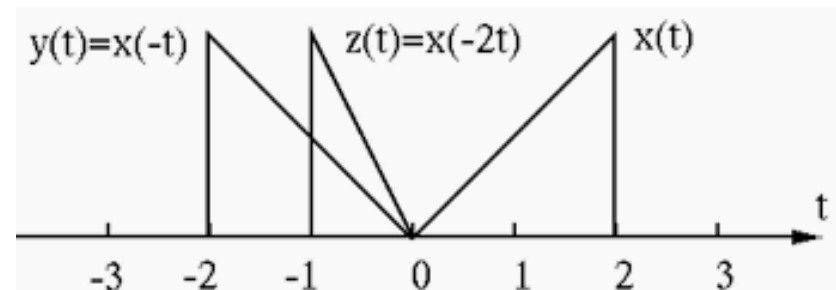
$$y(t) = x(t + t_0)$$



Tidsreversering

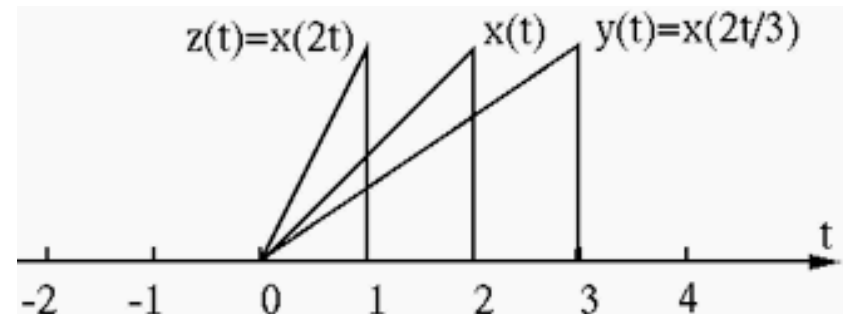
$$y(t) = x(-t)$$

horizontally symmetric with respect to the origin



Skalning

$$y(t) = x(at)$$



Signal transformationer: tid

A linear **time shift** signal transformation is given by:

$$y(t) = x(at + t_0)$$

t_0 a signal offset from 0,

a parameter represents a signal stretching

$ a > 1,$	stretching
$0 < a < 1$	compression
$a < 0$	reflection

