

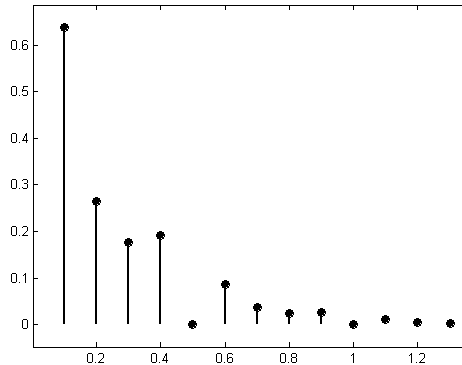
1. **DTFT (Fourier Transform i Diskret Tid)**
2. **DFT (Diskret tid Fourier Transform)**
3. **FFT (Fast Fourier Transform)**

DTFT

Fouriertransform i diskret tid

Samplad periodisk energisignal

Fourier transform i diskret tid (DTFT)



analys

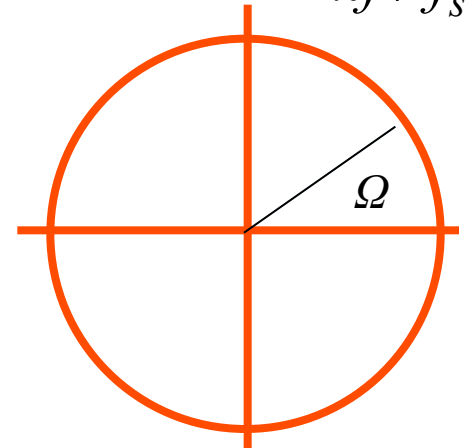
$$Y(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n]e^{-jn\Omega}$$

syntes

$$y[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} Y(\Omega)e^{j\Omega n} d\Omega$$

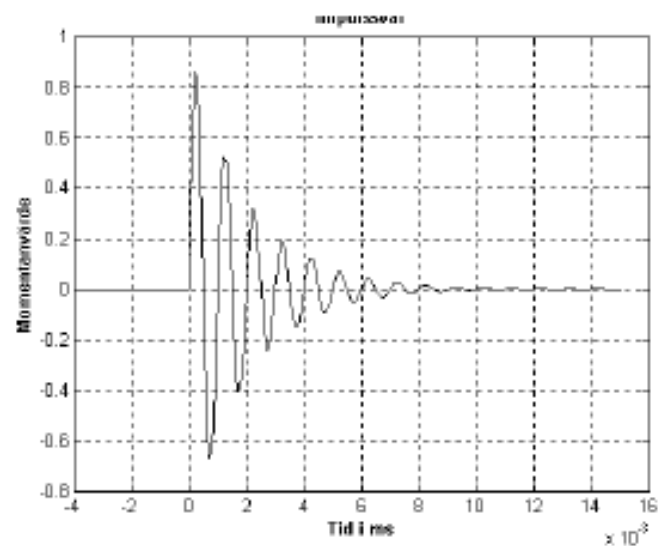
Normerade vinkelfrekvens

$$\Omega = 2\pi f / f_s$$

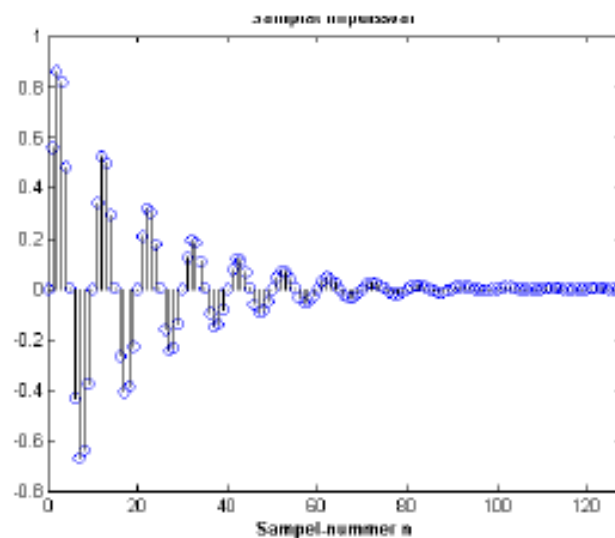


DTFT

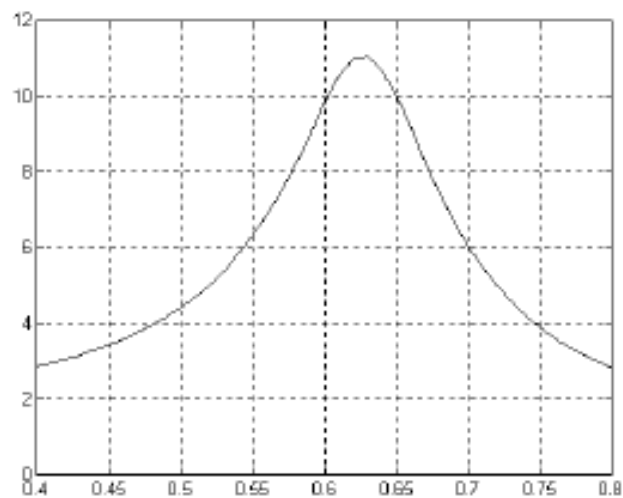
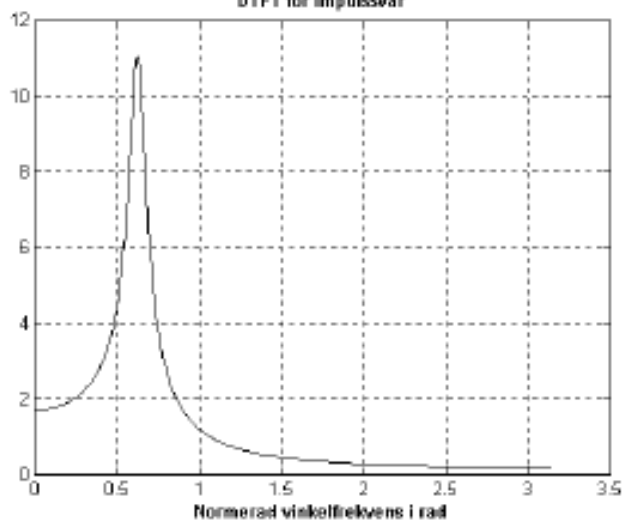
Signal



Samplad signal

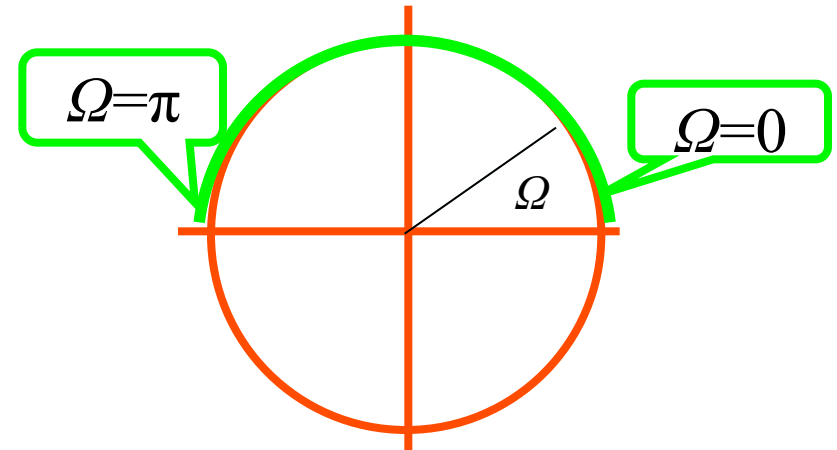


DTFT for impulsvar



Z- & Diskret Fourier transformen

$$z = e^{\sigma T_s} e^{j\Omega}$$



$$0 < \Omega \leq \pi$$

Hur räknar vi DTFT?

Att bestämma
frekvenssvar

$$z = e^{j\Omega}$$

DTFT

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n}$$

$$X(\Omega) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n]e^{-jn\Omega}$$

Exempel: DTFT

Bestäm DTFT för system som impulssvaret

$$h[n] = 3\delta[n] + 5\delta[n-1] + 3\delta[n-2]$$

DTFT: egenskaper

Linjäritet

$$a \{x_1[n]\}_{n=0}^{\infty} + b \{x_2[n]\}_{n=0}^{\infty} \supset a X_1(\Omega) + b X_2(\Omega)$$

Försdröjning

$$\{x[n-M]\}_{n=0}^{\infty} \supset e^{-jM\Omega} X(\Omega)$$

Dualitet

$$y[n] = x[n] * h[n] \Rightarrow X(\Omega) Y(\Omega)$$

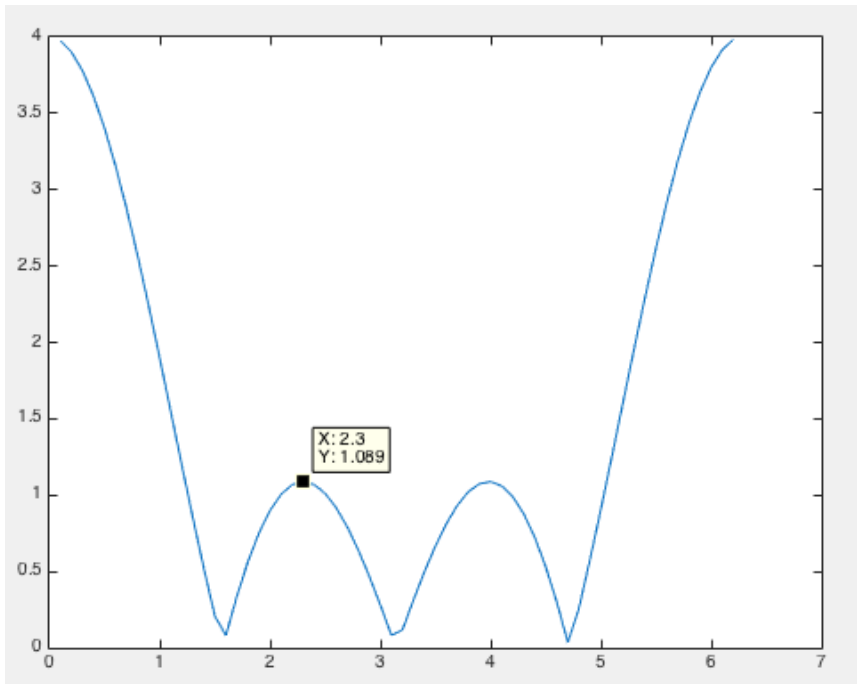
$$x[n]y[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\Omega)Y(\Omega - \theta) d\theta$$

Parsevals formel

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega$$

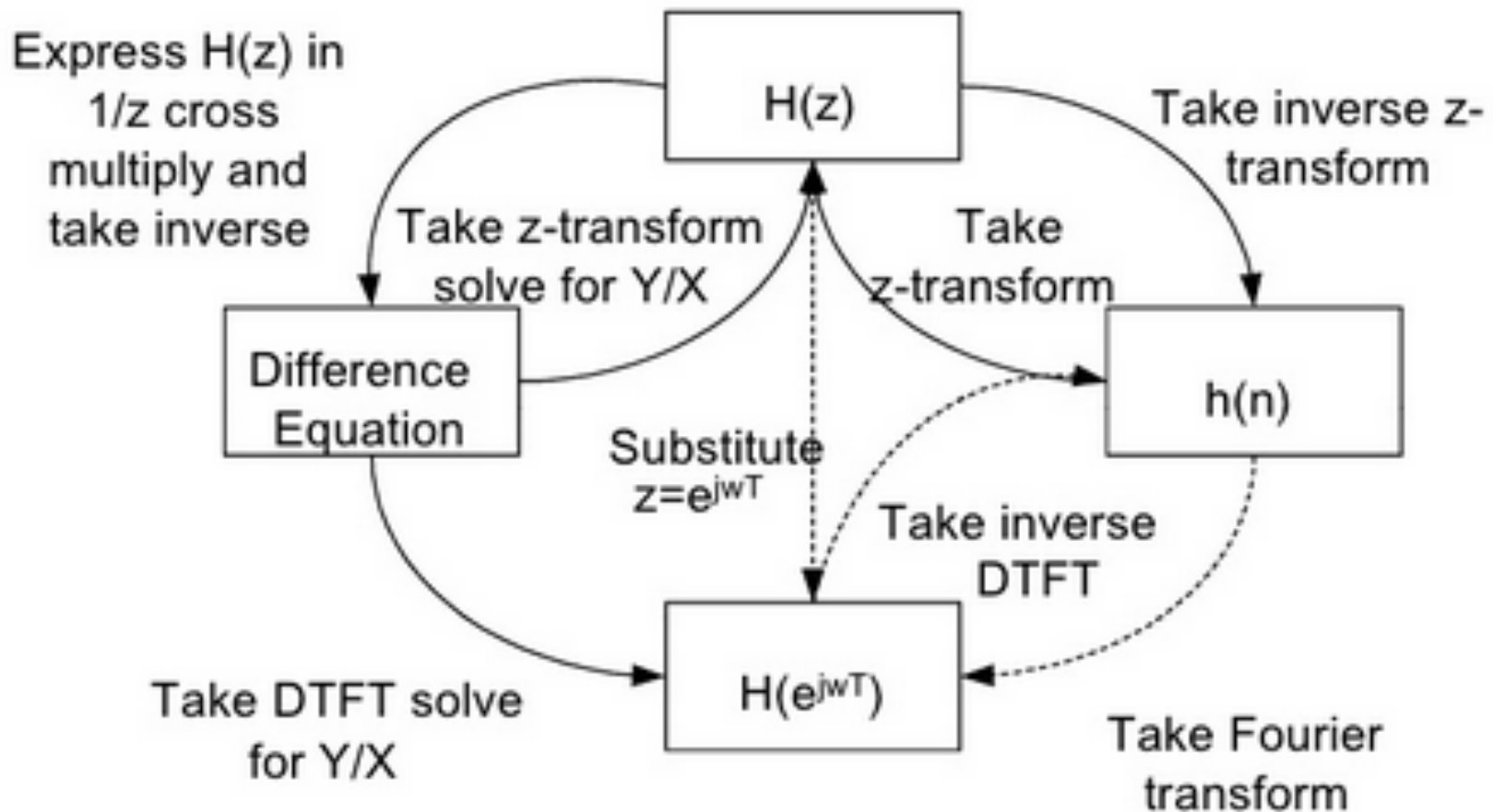
Exempel: DTFT

Bestäm DTFT av en diskret signal
 $x[n] = u[n] - u[n-4]$

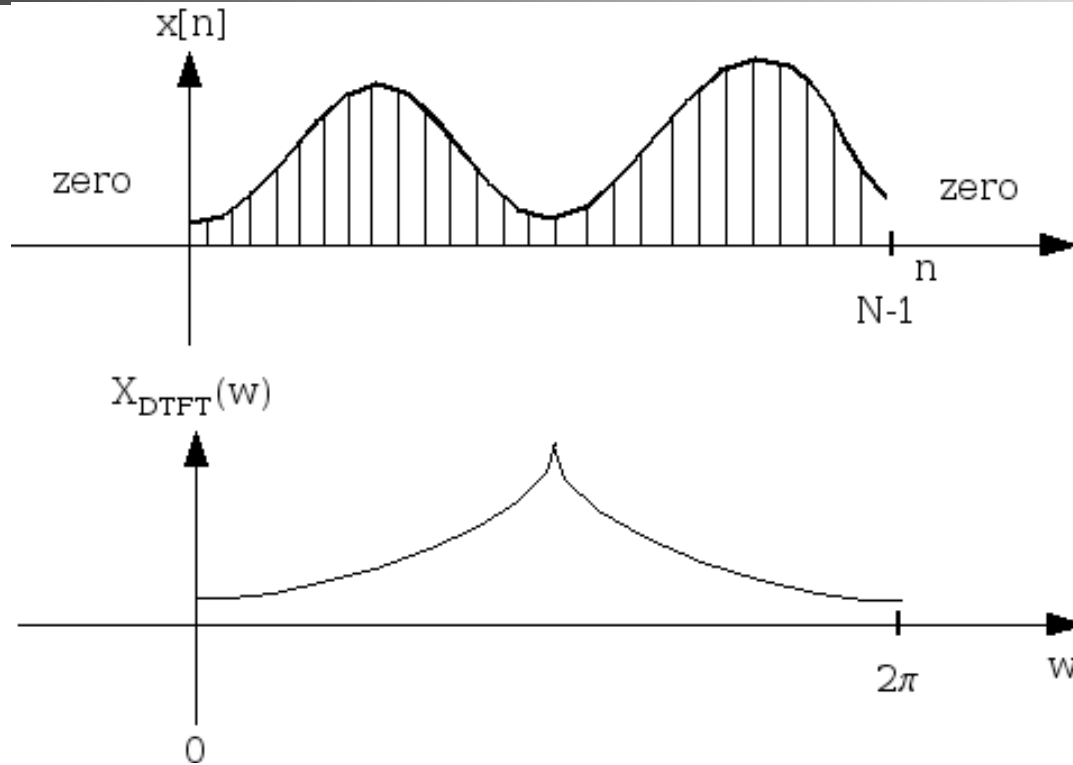


Antar att $x[n]$ är samplade variant av den tidkontinuerliga signal ($f_s=20\text{kHz}$).
Vilka frekvenser motsvarar spikar i spektrumet?

Z- & Diskreta Fourier transformen



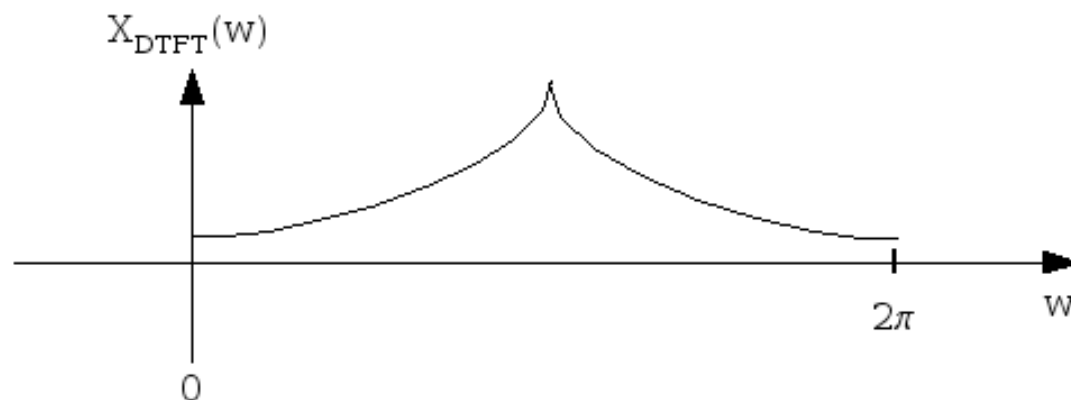
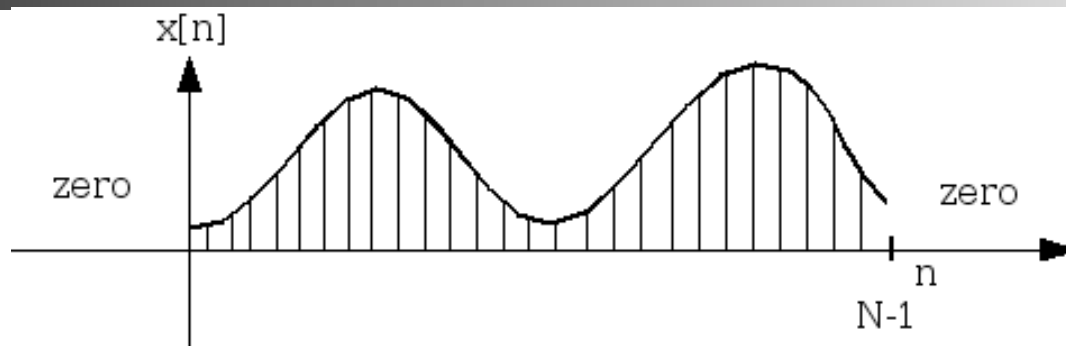
Problem med DTFT



Kontinuerlig
spektrum

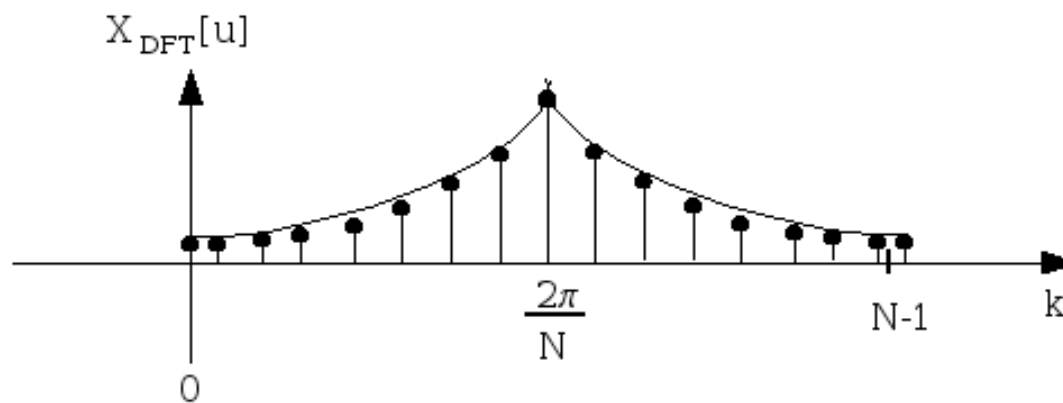
Kan inte behandlas i datorn

Problem med DTFT



DFT

samplar även
frekvens domän



DFT

Diskret Fouriertransform

DFT

Tid $\rightarrow$ Frekvens (DFT)

$$Y(k) = \sum_{n=0}^{N-1} y(n) e^{-jnk 2\pi/N}$$

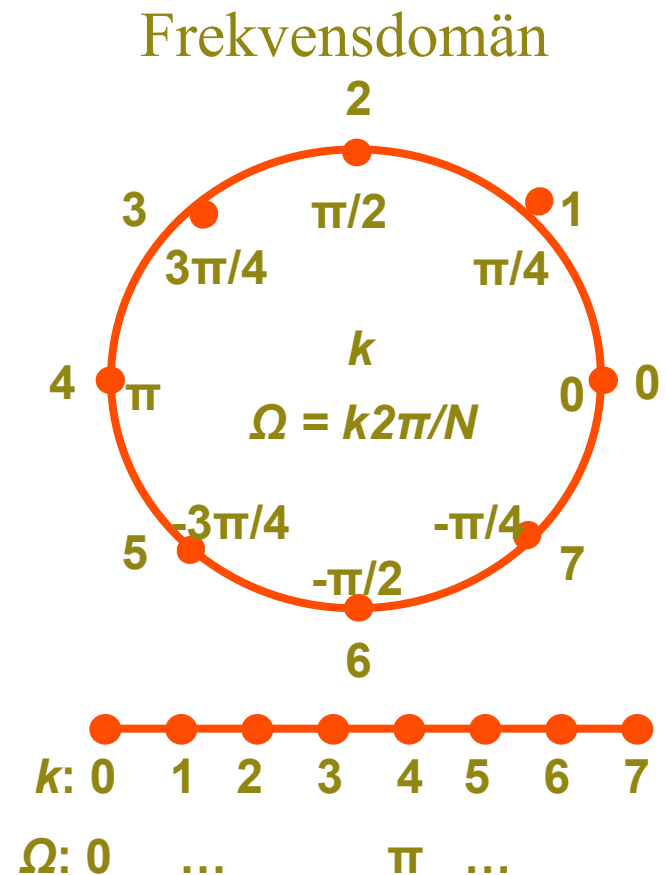
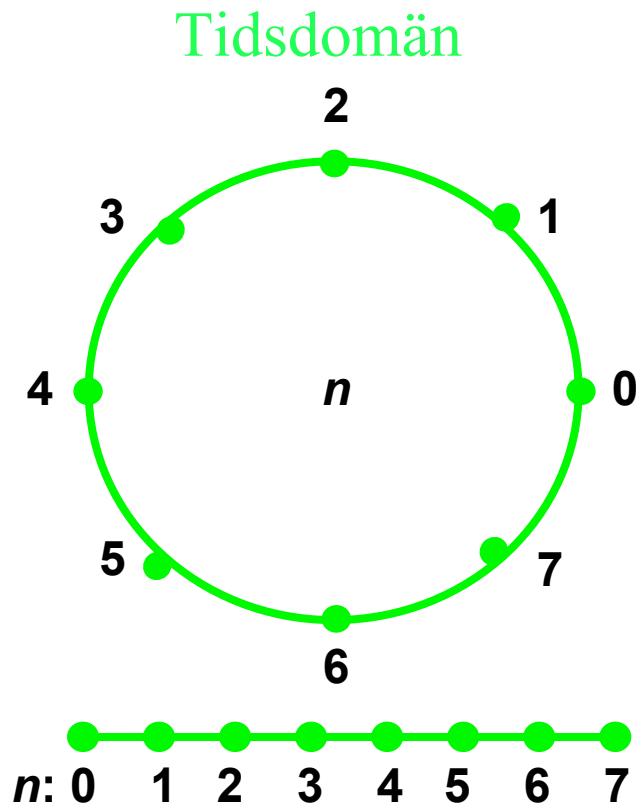
Frekvens $\rightarrow$ Tid (Invers DFT, IDFT)

$$y(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} Y(k) e^{jnk 2\pi/N}$$

DFT – domäner

DFT transformerar signaler mellan *diskret tidsdomän*
diskret frekvensdomän

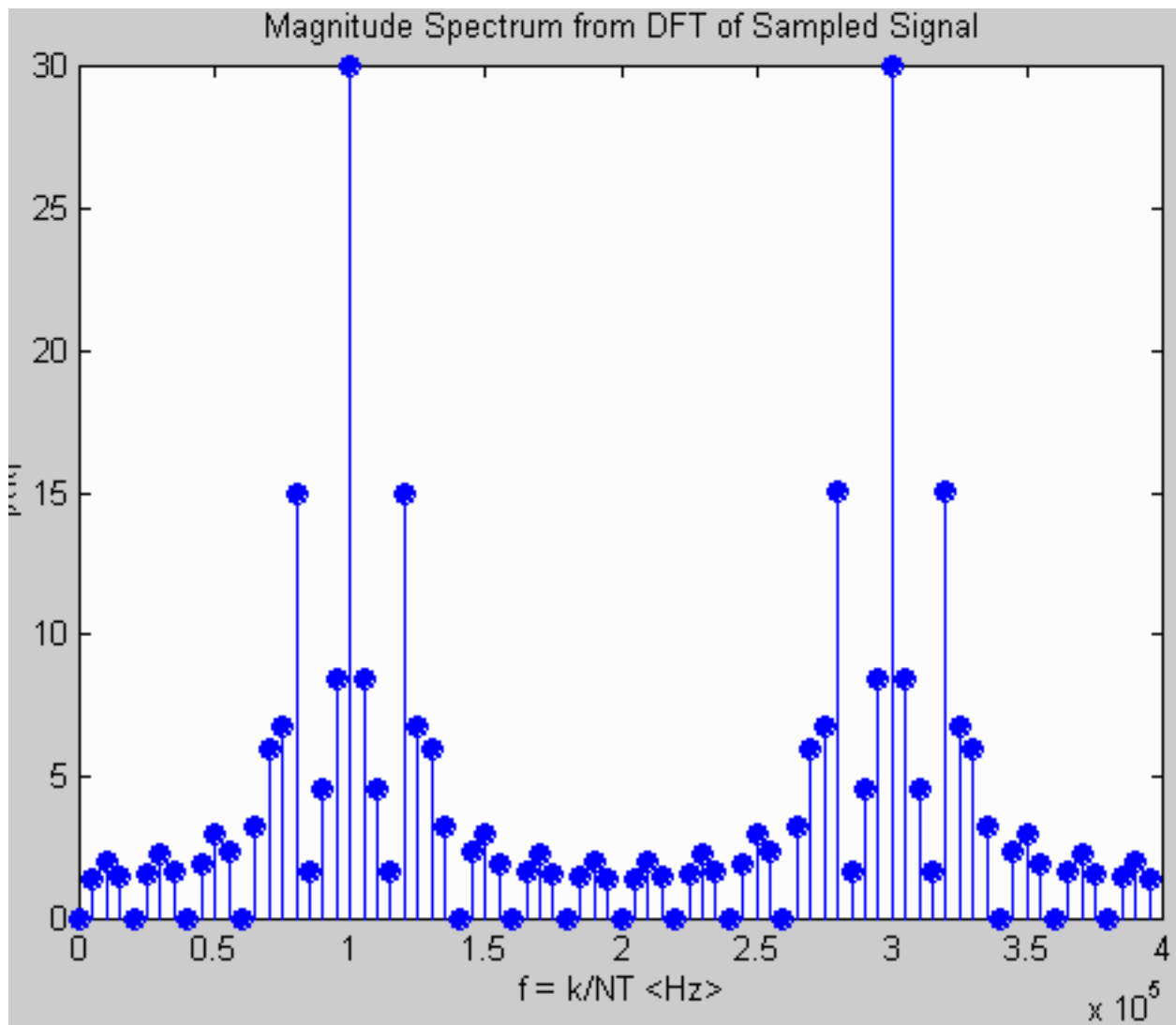
N punkter i tidsdomänen ger N punkter i frekvensdomänen



Två praktiska problem...

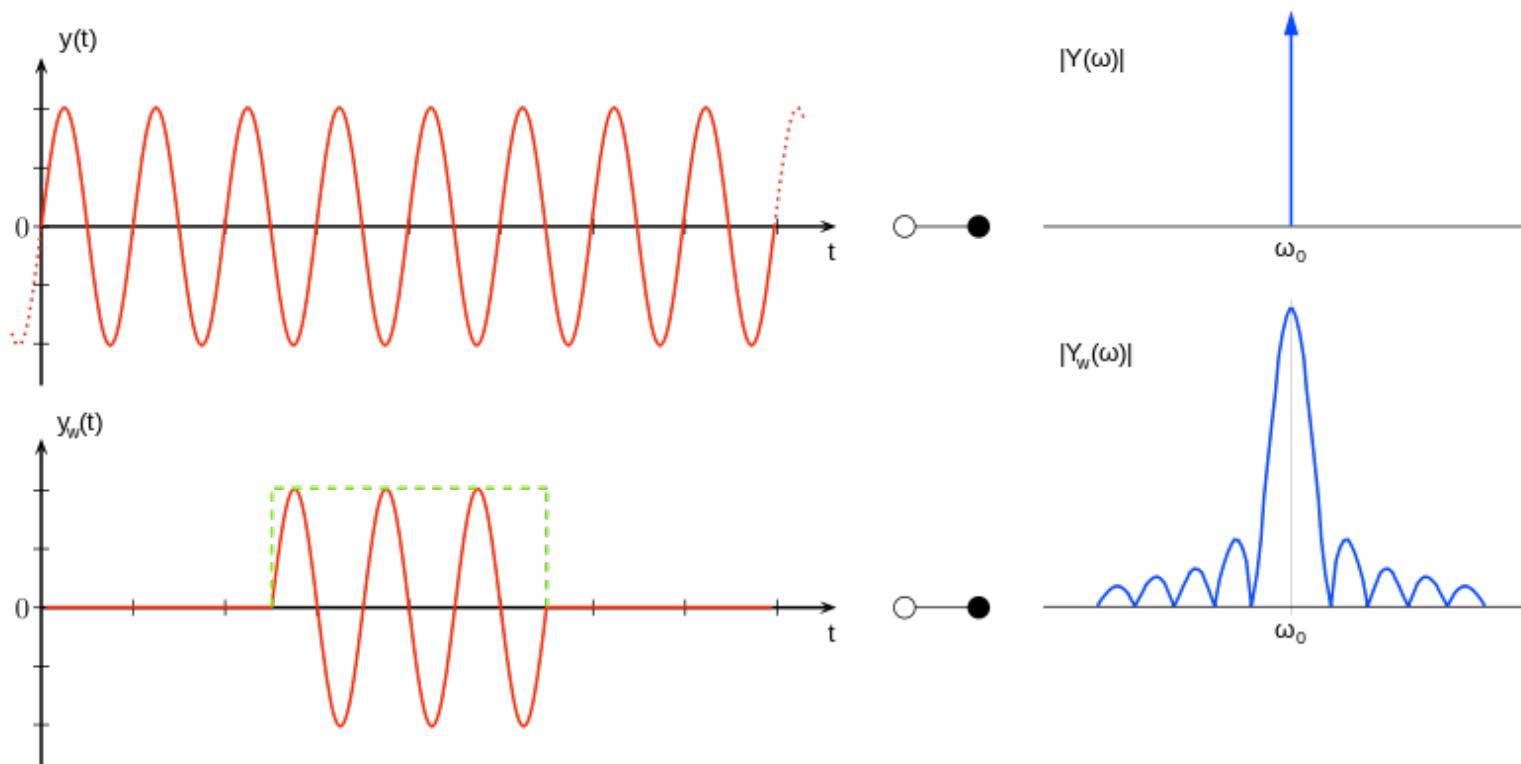
Läckage

Sampling i
frekvensen

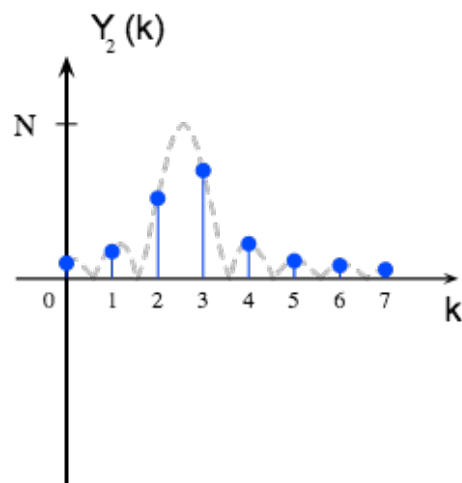
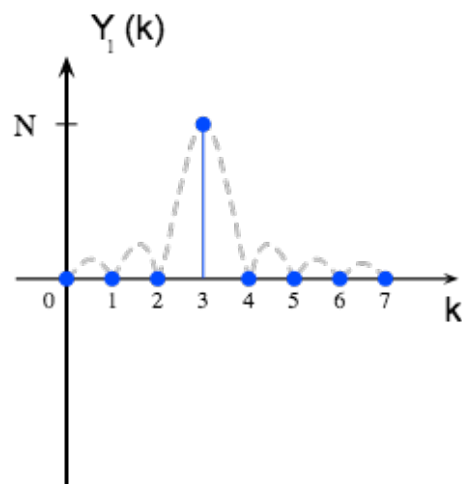
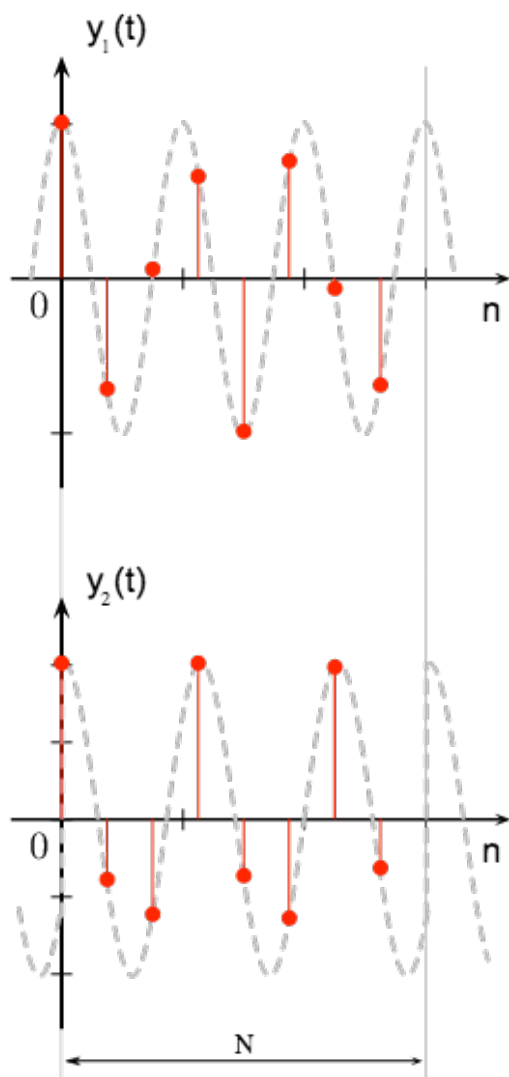


(1) Läckage

Original (periodiskt) signal är inte periodiskt efter sampling



(1) Läckage



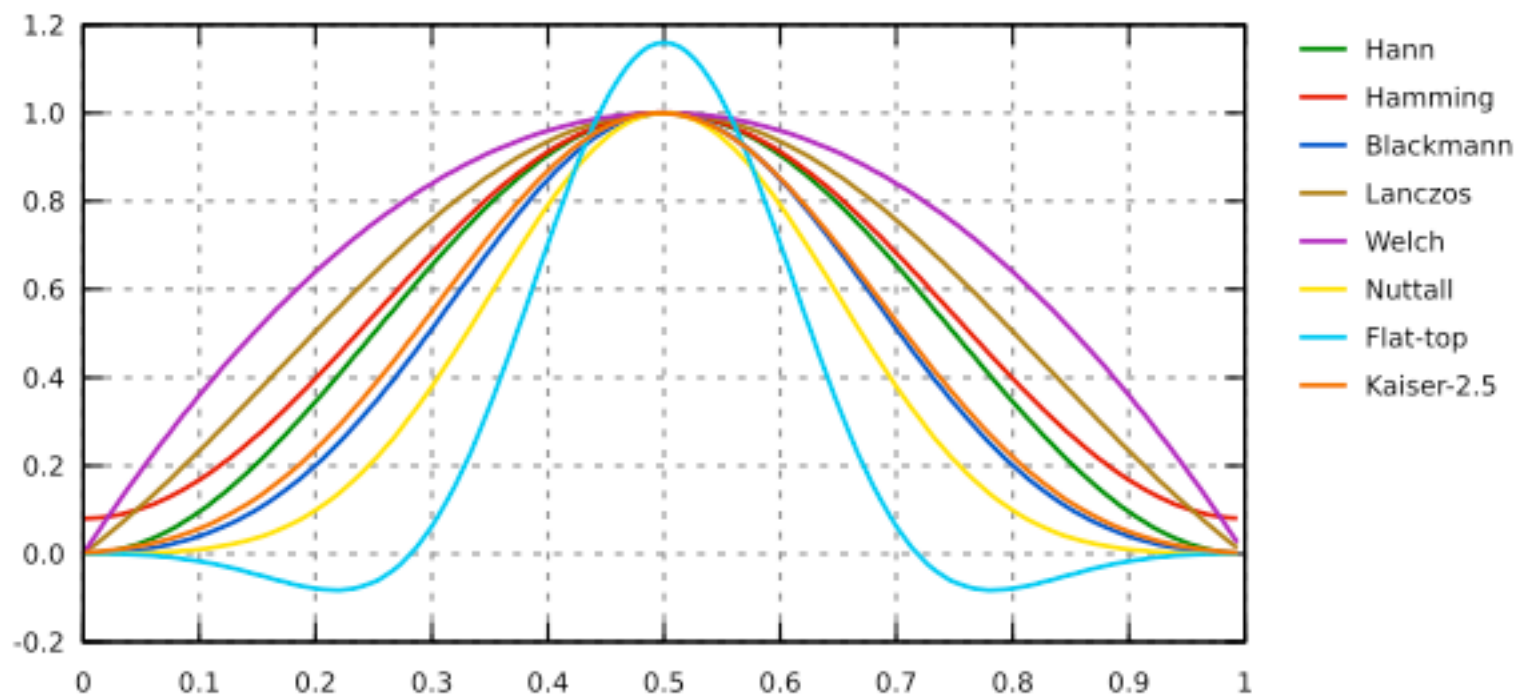
Diskontinuiteter - påverkar spektrum -> sidolober

(1) Lösning: Fönstring

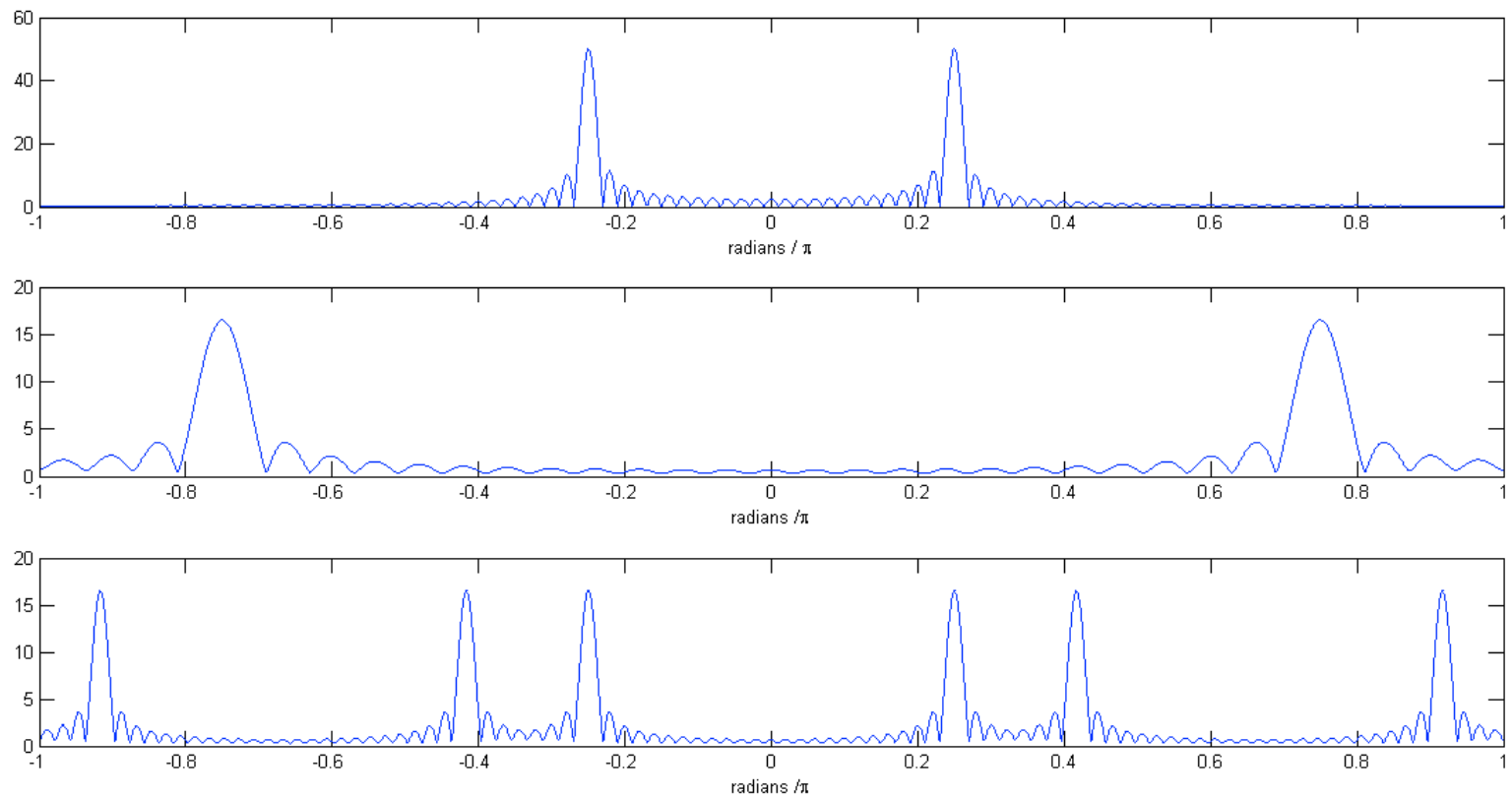
Signalen multipliceras med ett fönster som går mot noll i intervallets ändar!

Undertrycker sidolober

Något försämrad upplösning i frekvensled



(2) Effekt av sampling



DFT – Diskret Fouriertransform

Fouriertransform av verkliga, samplade signaler – inte bara matte

Spektral analys

Spektrum & Spektrogram

Filtrering & bildbehandling

Snabb faltning av långa sekvenser/stora filterkärnor

Kodning

Spektralbaserad bildkodning (typ JPEG)

Ljudkodning (typ MP3)

Talteknologi

Särdragsextraktion för taligenkänning mm

Audio/musik

Pitch-shift/time-stretch

Osv...

FFT – Fast Fourier Transform

FFT är en effektiv algoritm för att beräkna DFT

FFT är helt avgörande för att många applikationer av DFT ska vara praktiskt möjliga!

FFT fungerar genom att rekursivt dela upp problemet i mindre problem, s.k. ”söndra och härska” (divide-and-conquer)-metodik

Beräkningshastighet

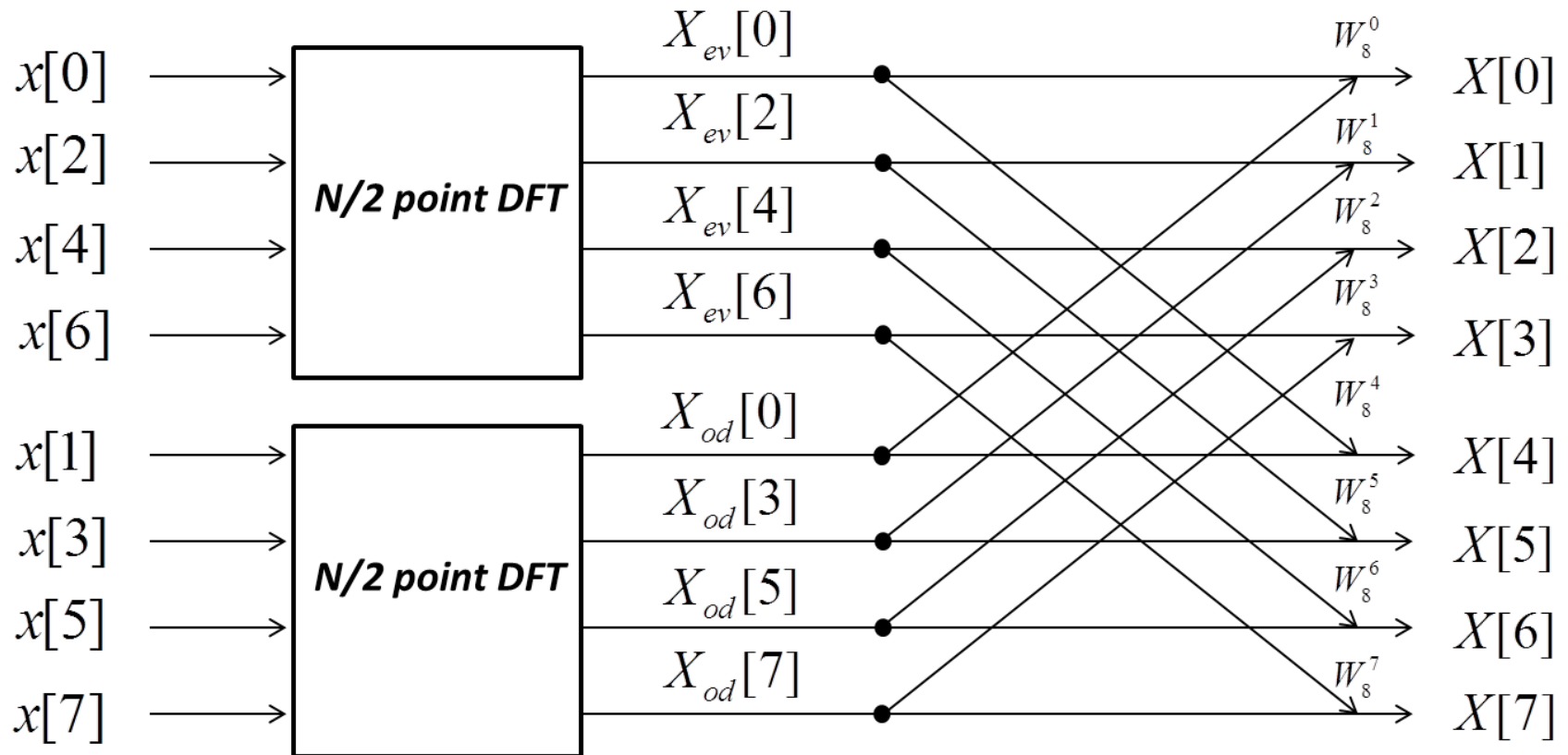
Antal multiplikationer:

DFT: $\sim N^2$

FFT: $\sim N \log(N)$

<i>N</i>	<i>ggr förbättring</i> <i>N² / NlogN</i>
64	15.3
256	46.1
1024	147.5
4096	492.1

FFT – Fast Fourier Transform



Sammanfatning: FT för diskreta system

En *Fourierserie* uttrycker periodiska signaler som en summa av diskreta frekvenskomponenter

Fouriertransformen uttrycker icke-periodiska signaler som kontinuerliga frekvensfunktioner

DFT transformerar mellan diskret tids-domän och diskret frekvensdomän

FFT är en algoritm för att beräkna DFT

Transformer i Fourier-familjen

Tidsdomän	Frekvensdomän	Transform
Periodisk & Kontinuerlig	Diskret & Aperiodisk	Fourierserie
Periodisk & Diskret	Diskret & Periodisk	DFT (Diskret fouriertransform)
Aperiodisk & Kontinuerlig	Kontinuerlig & Aperiodisk	Fouriertransform
Aperiodisk & Diskret	Kontinuerlig & Periodisk	DTFT / Z-transform