

1. Olika sätt att beskriva en (periodisk) signal
2. Fourier serie
3. Frekvensspektrum

Hur kan en analog signal
beskrivas

Beroende på tillämpning kan det vara praktiskt att använda ett approximativt uttryck på signalen.

Ide:

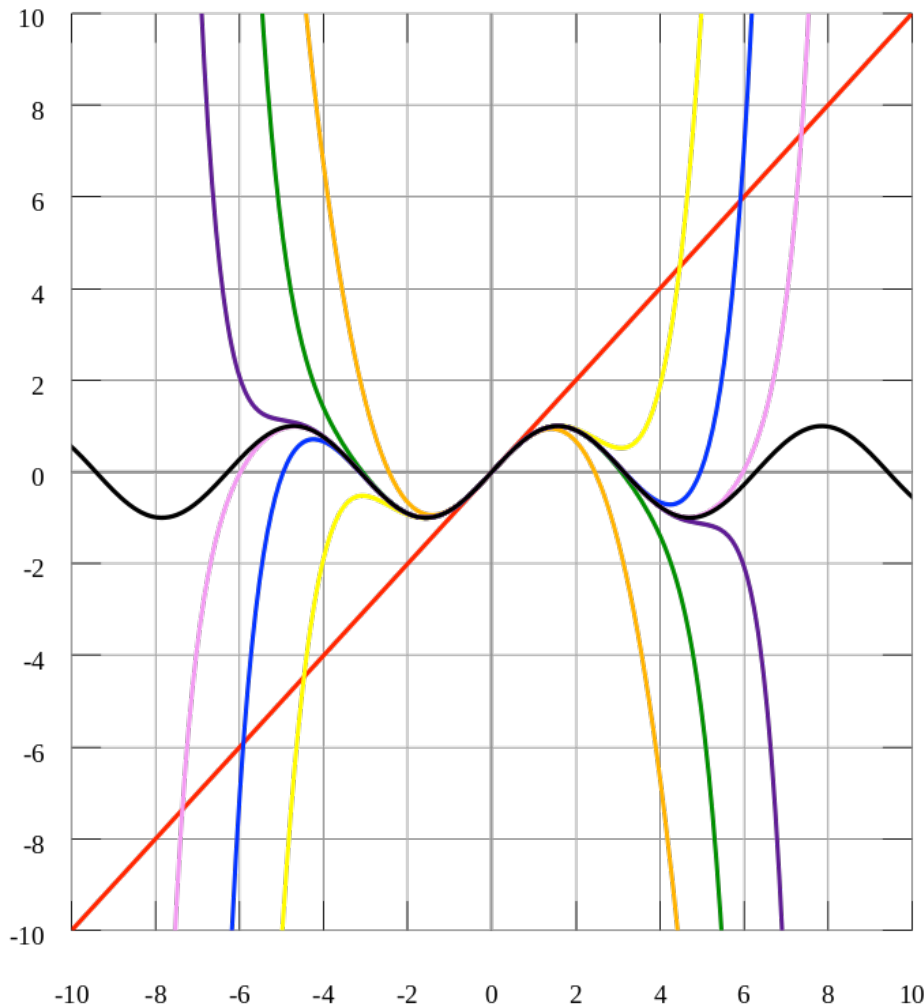
Uttrycka en signal med enklare signaler
Approximera hela signalen med de första
(viktigaste) termerna

Krav:

periodisk signal

(1) Taylorutveckling: Sinus funktion

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots, \quad \forall x$$



Funktionen $\sin(x)$ och dess taylorpolynom av grad 1, 3, 5, 7, 9, 11 och 13

(1) Taylorutveckling

Om n är ett positivt heltal, kan en taylorutveckling av ordning n av funktionen f skrivas som

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x)$$

Taylorpolynomet

$$T_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Lanrangesrestterm

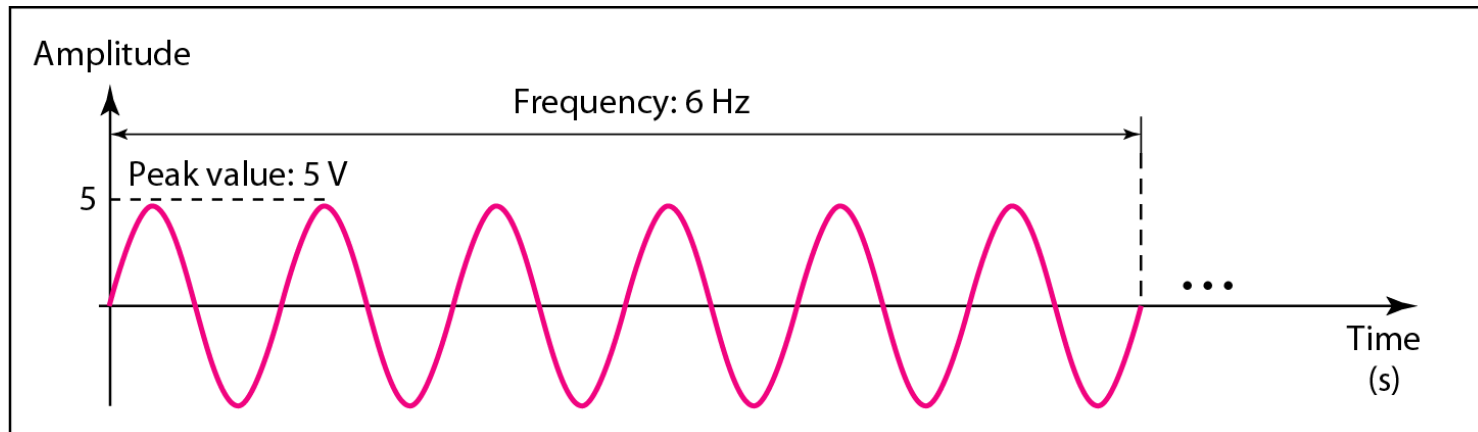
$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(z_n)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},$$

När taylorutvecklingens grad ökar, närmar den sig den sökta funktionen.

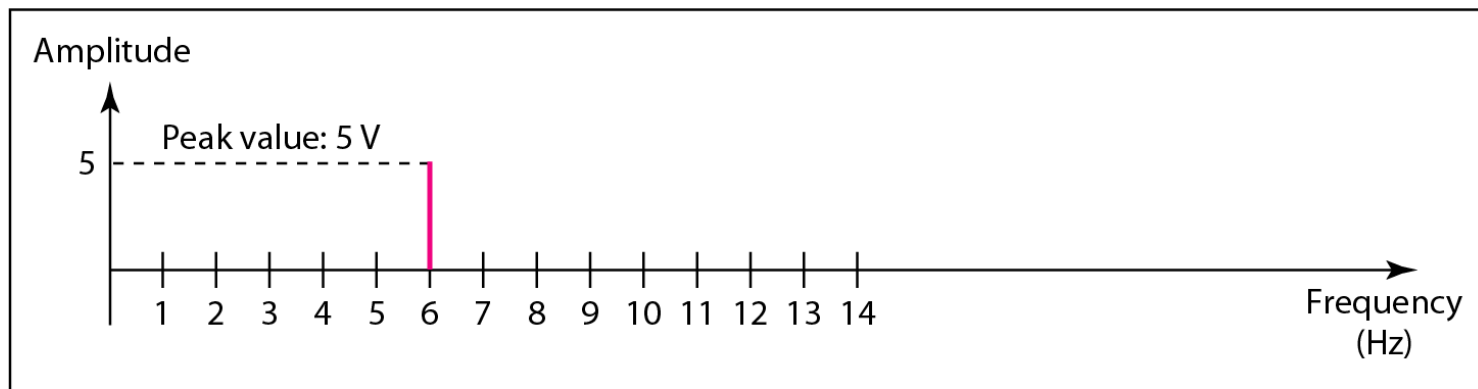
Polynomer är jobbiga att behandla

Vilka enkla och periodiska funktioner vi känner till?

Sinus våg i tid- och frekvensdomän



a. A sine wave in the time domain (peak value: 5 V, frequency: 6 Hz)



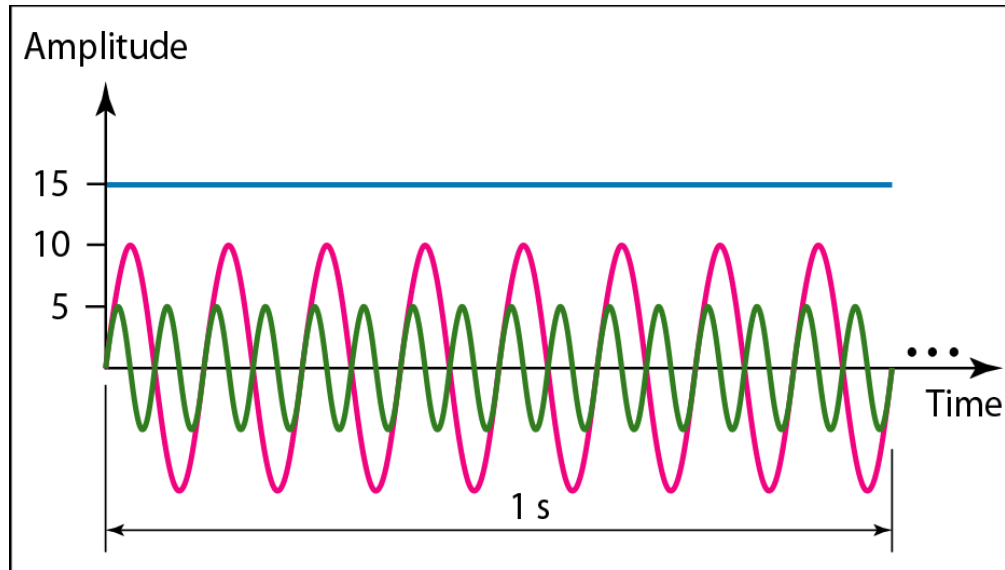
b. The same sine wave in the frequency domain (peak value: 5 V, frequency: 6 Hz)

Periodiska signaler

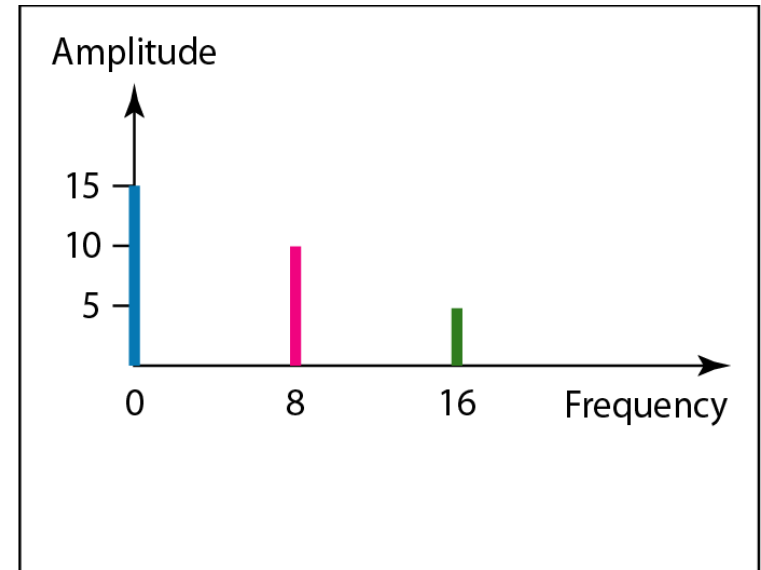
A complete sine wave in the time domain
can be represented by one single spike in
the frequency domain!

Periodiska signaler

3 sinusvågar, varav alla har olika amplituder och frekvens



a. Time-domain representation of three sine waves with frequencies 0, 8, and 16



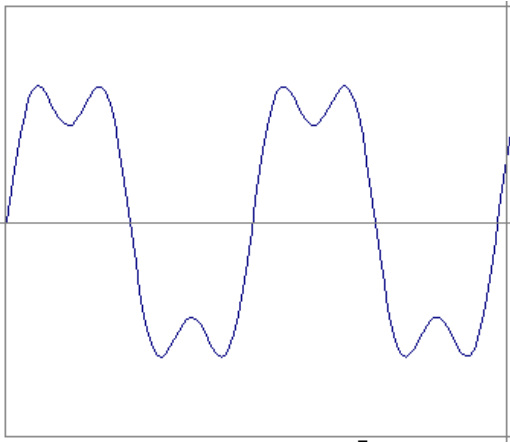
b. Frequency-domain representation of the same three signals

Frekvensdomänen är mer kompakt och användbar när vi har att göra med mer än en sinusvåg.

Kombination av sinusvågar

Exempel:

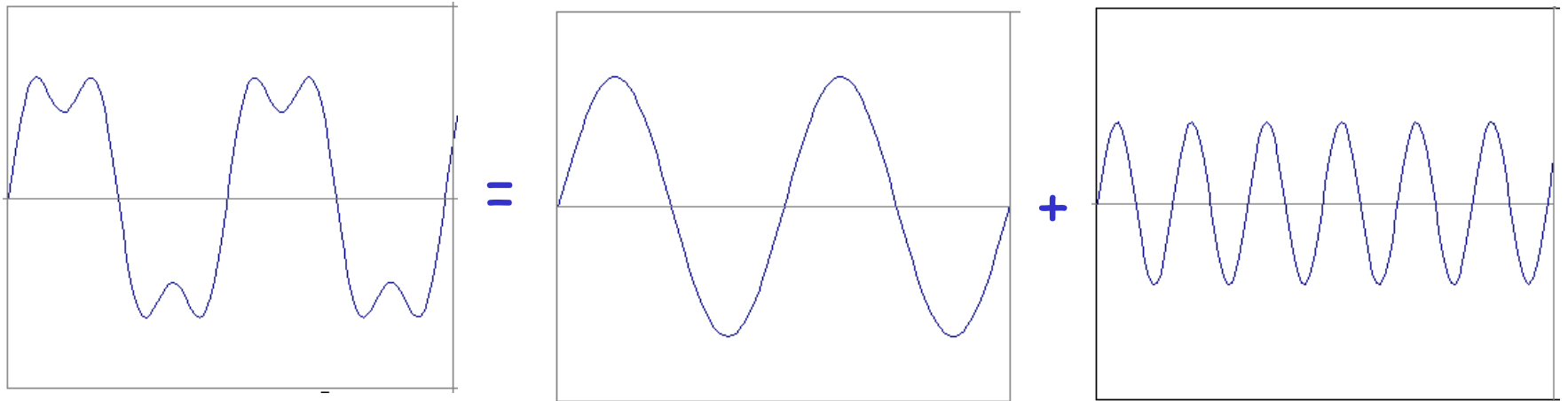
$$g(t) = \sin(2\pi f t) + (1/3)\sin(2\pi (3f) t)$$



Kombination av sinusvågar

Exempel:

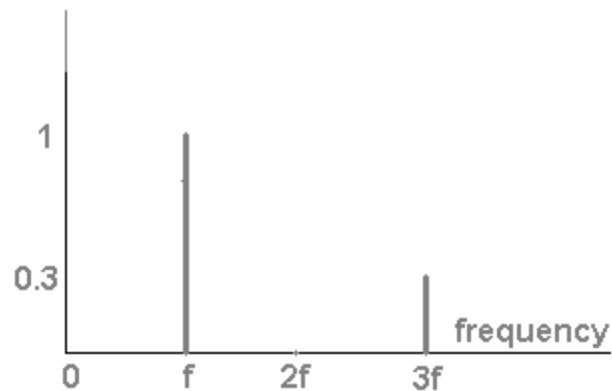
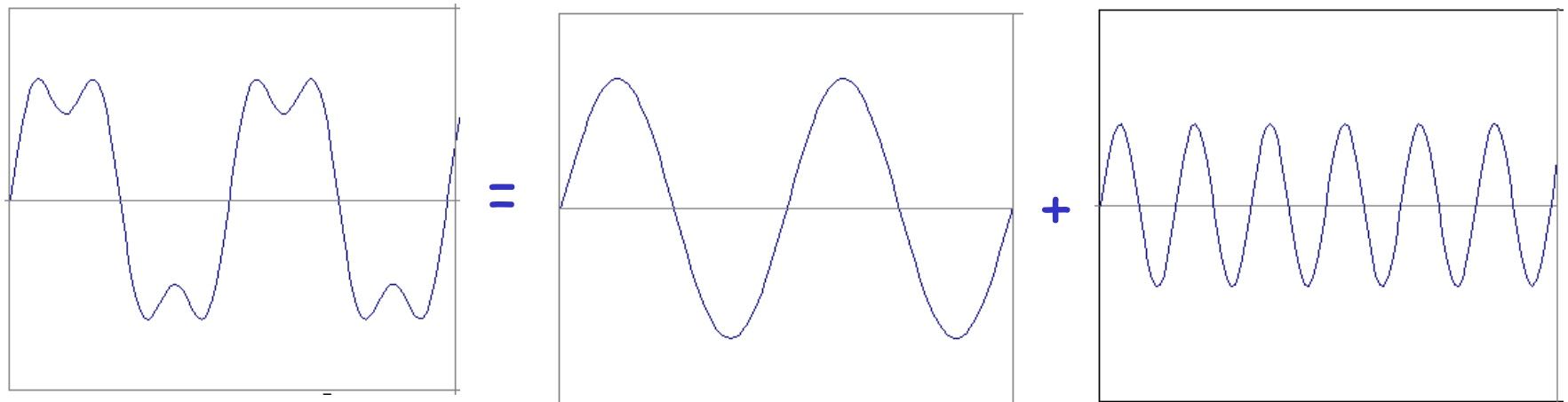
$$g(t) = \sin(2\pi f t) + (1/3)\sin(2\pi (3f) t)$$



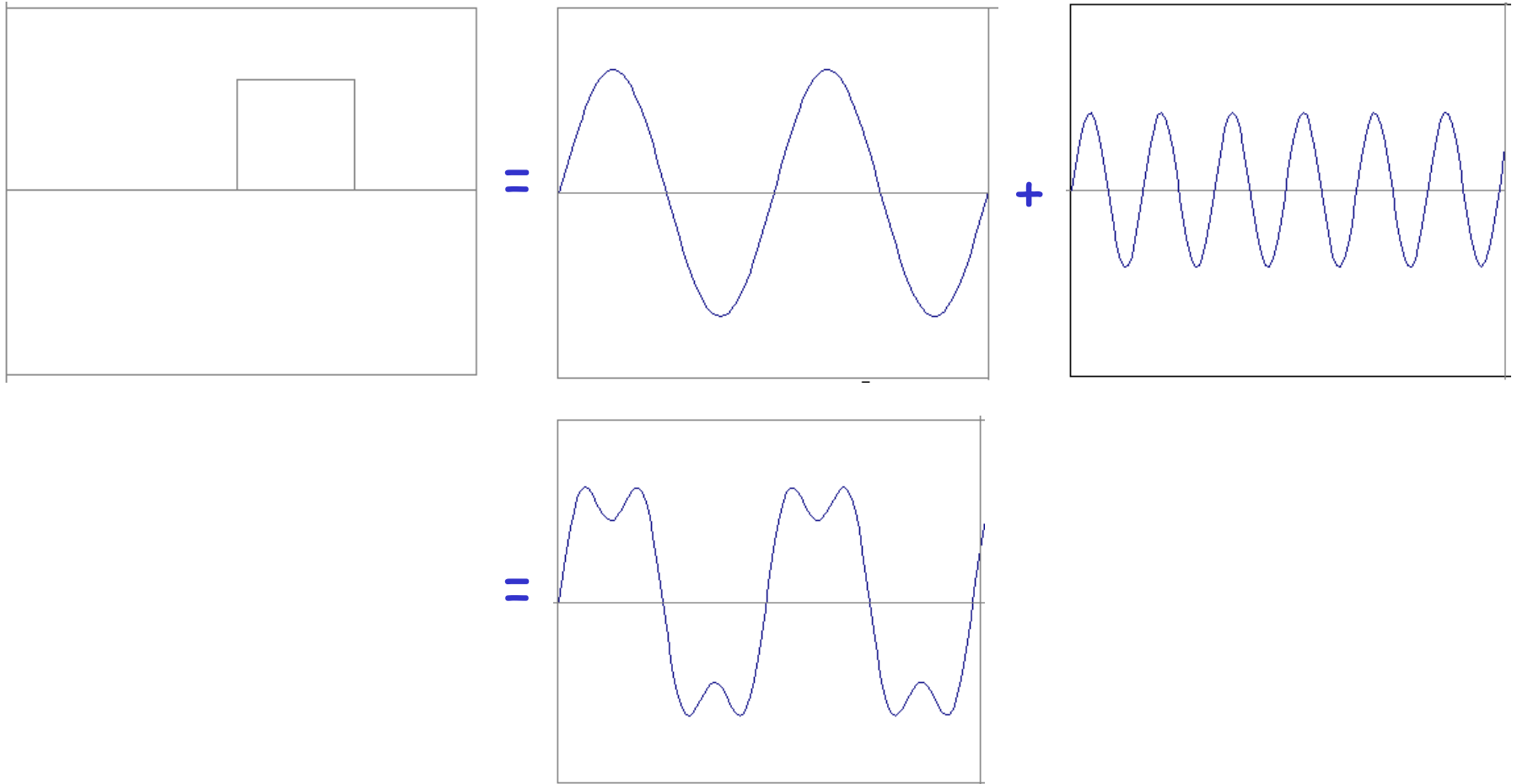
Kombination av sinusvågar

Exempel:

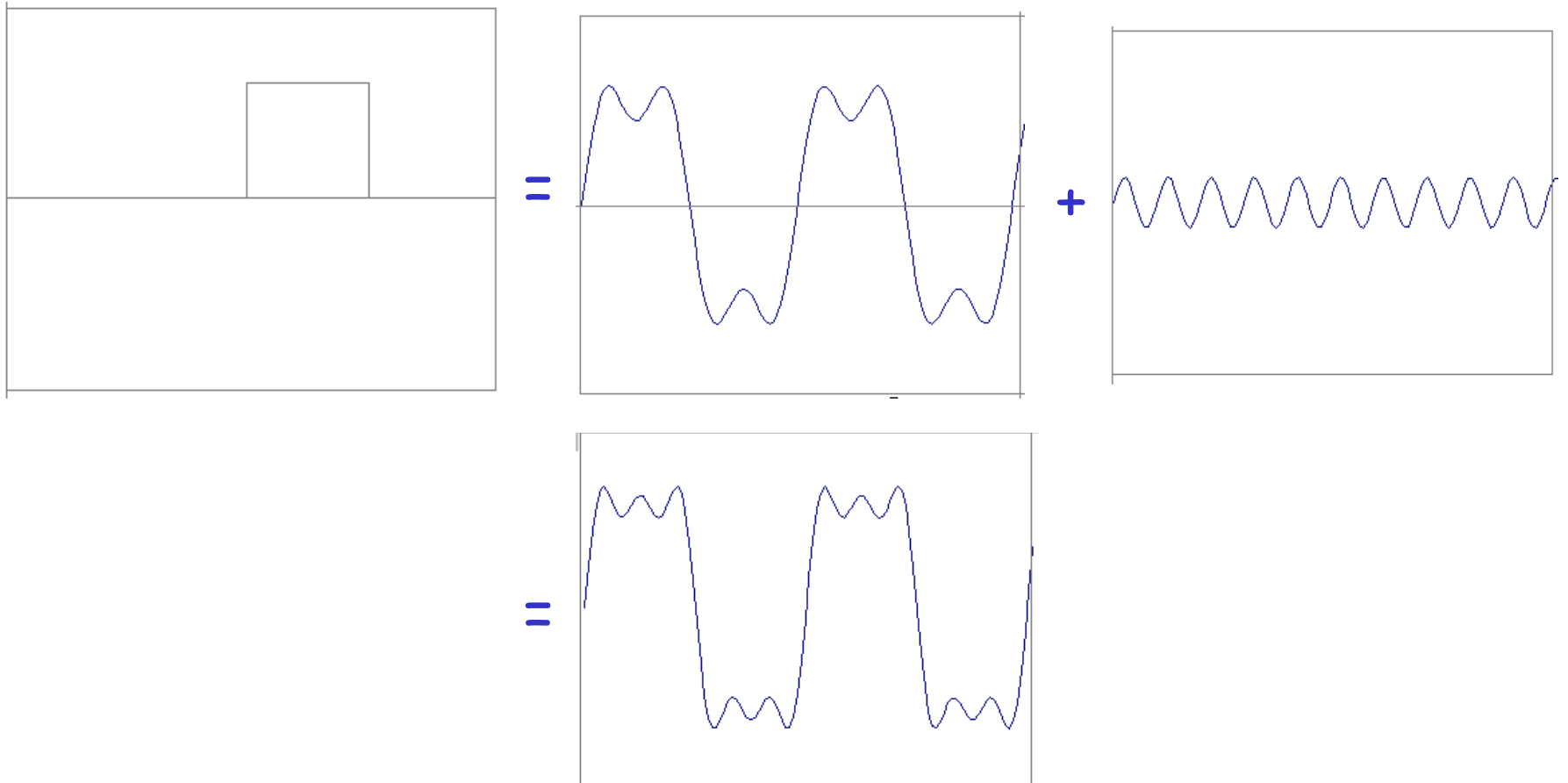
$$g(t) = \sin(2\pi f t) + (1/3)\sin(2\pi (3f) t)$$



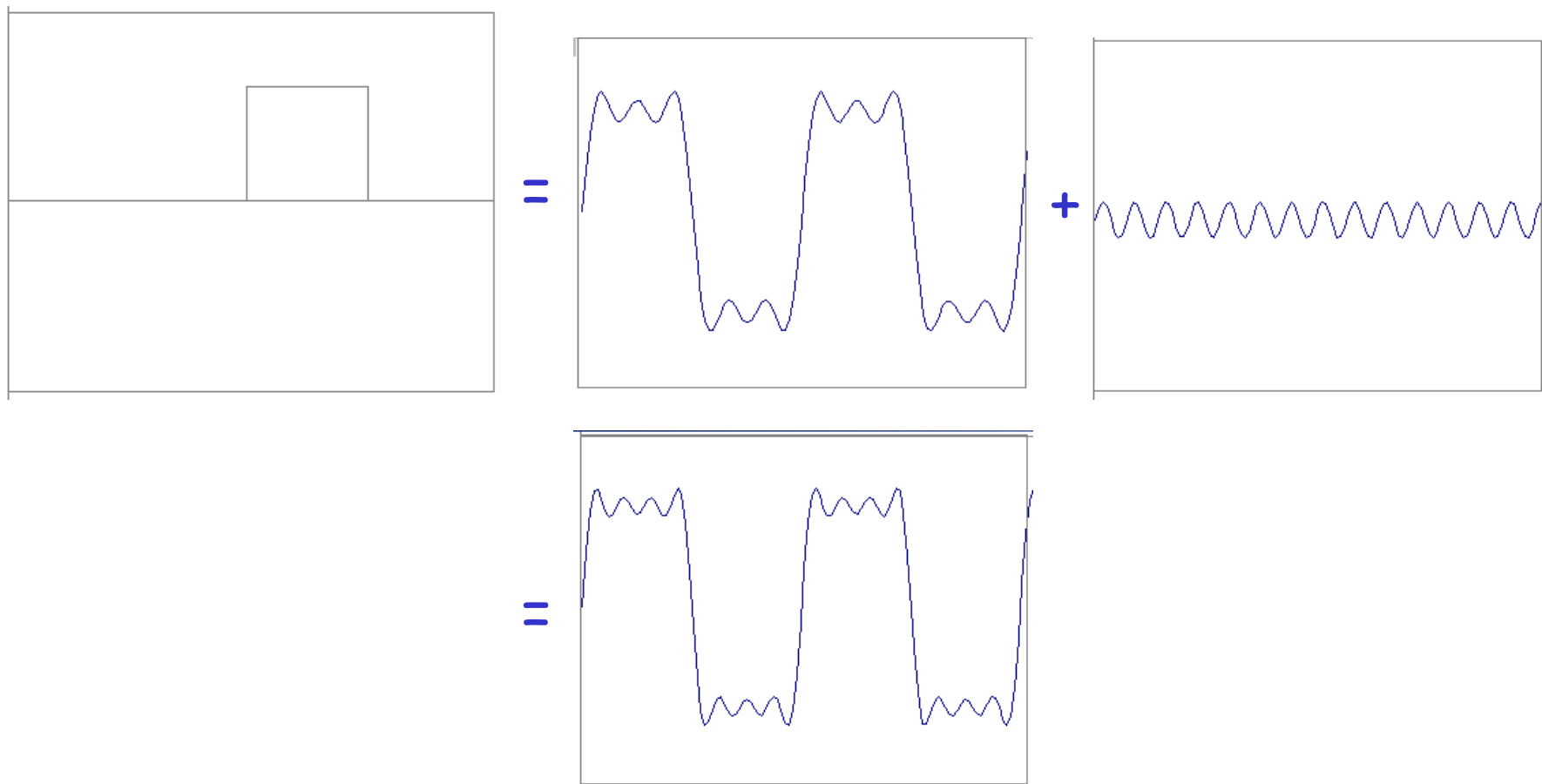
Kombination av sinusvågar



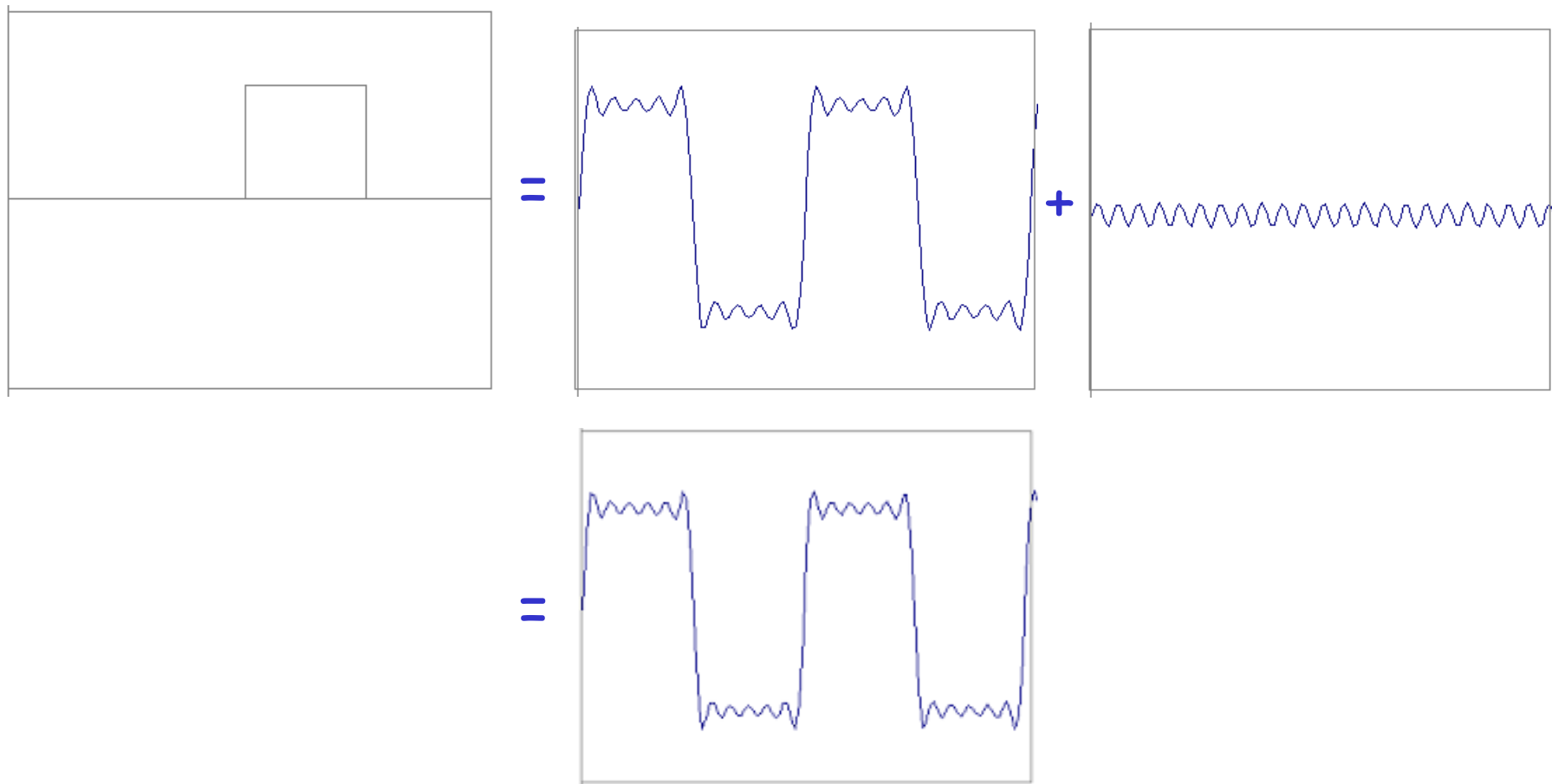
Kombination av sinusvågar



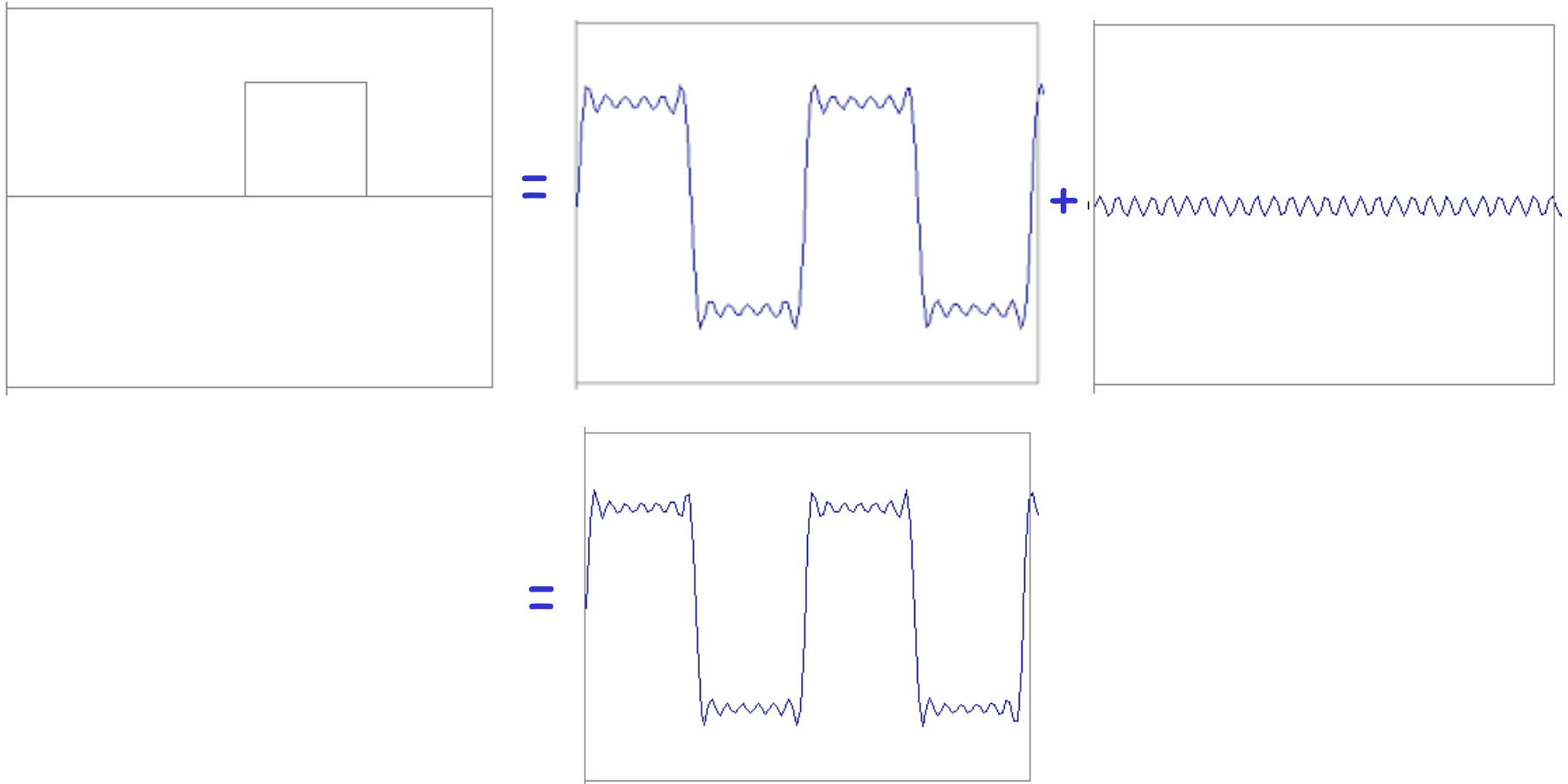
Kombination av sinusvågar



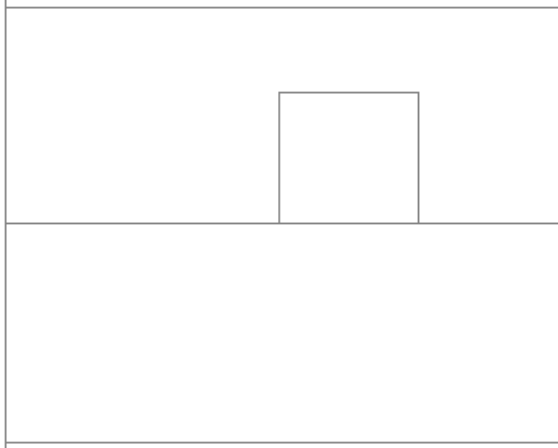
Kombination av sinusvågar



Fyrkant approximation med sinunvågar

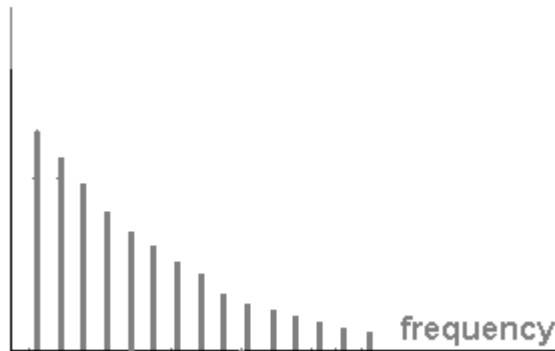


Fyrkant approximation med sinunvågar



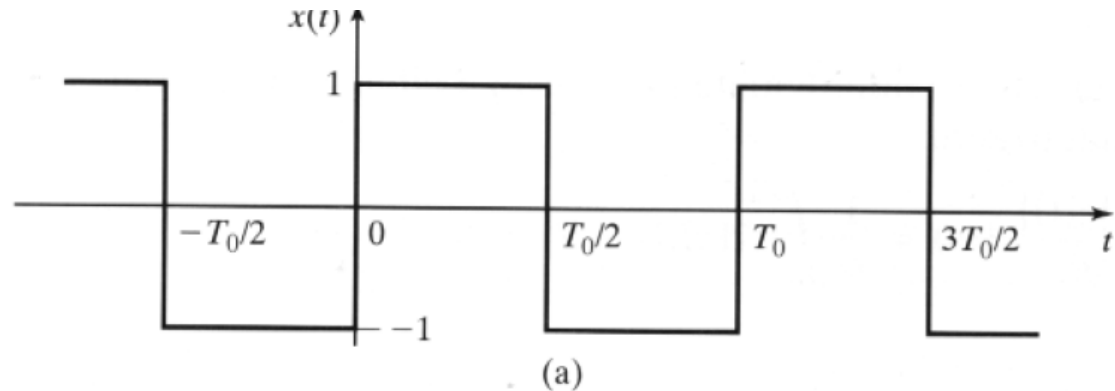
=

$$A \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sin(2\pi kt)$$

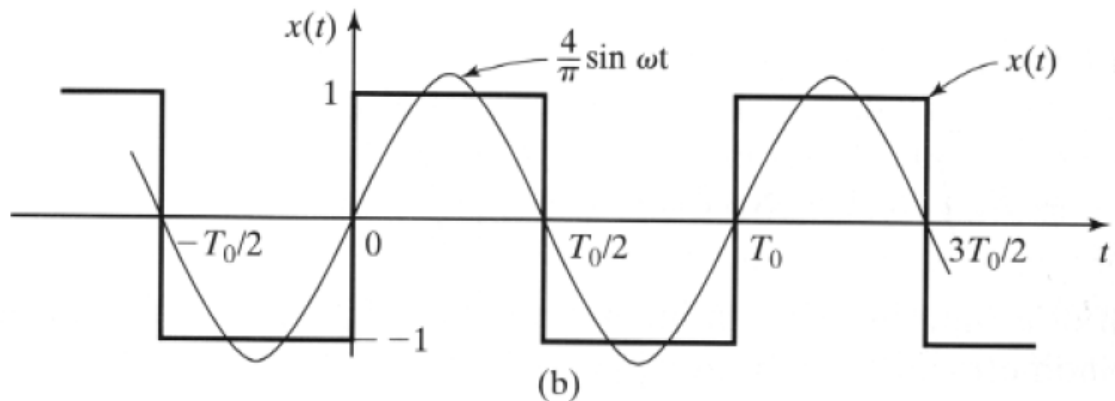


Signalsyntes (periodisk signal)

Fyrkantpuls

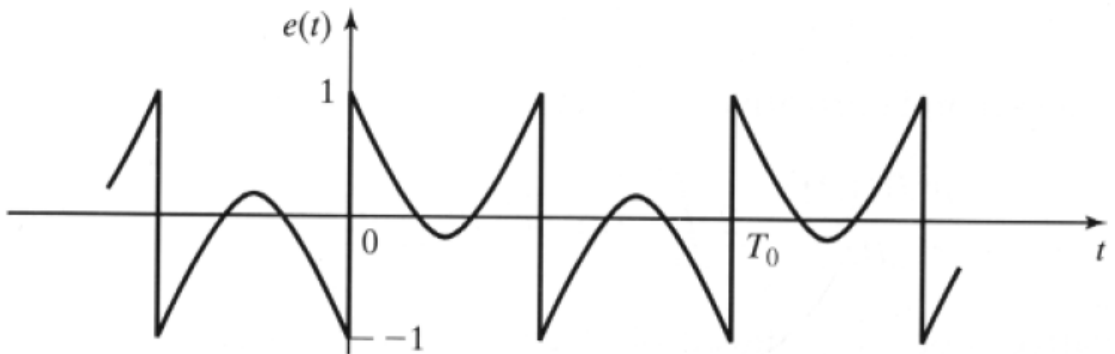


Approximation med en sinussignal



Felfunktion

Den ska vara så liten
som möjligt. Men vi är
fria att bestämma med
vilket mått vi mäter



Fourier serie

Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830)

Hade 'galen' idé (1807)

Varje periodisk funktion kan skrivas om som en viktad summa av sinus och cosinus av olika frekvenser.

Tror inte på det?

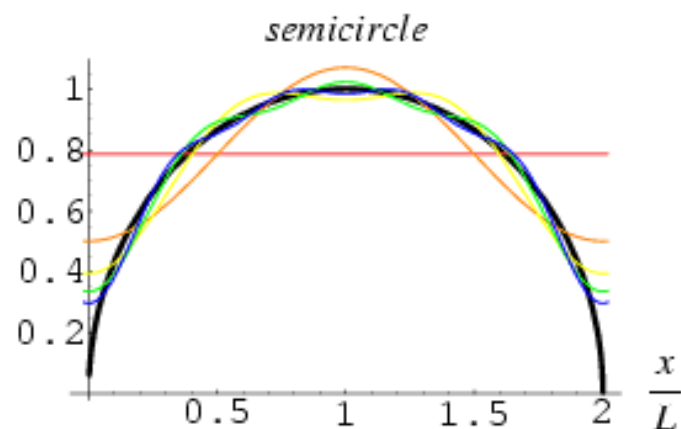
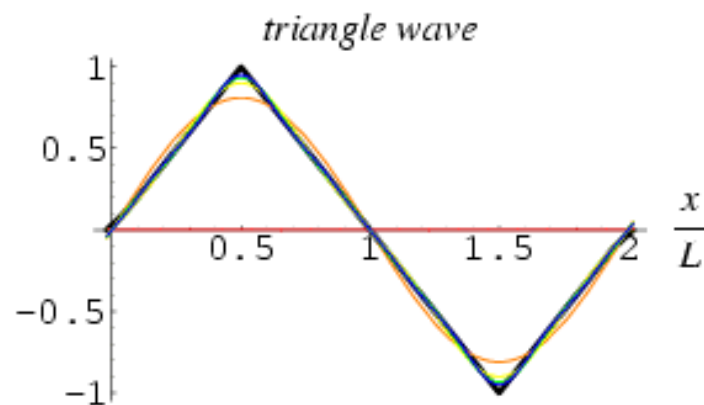
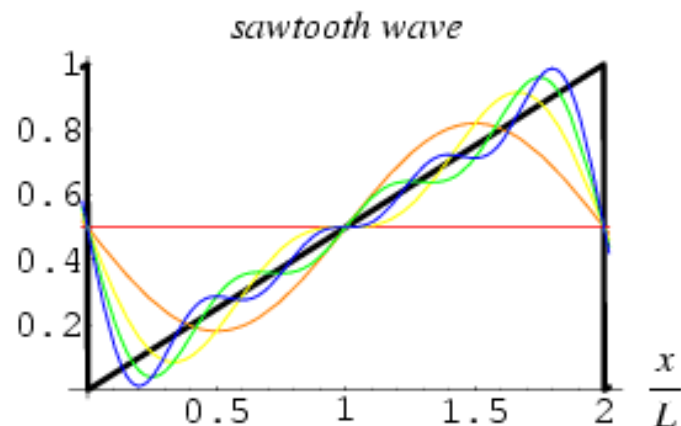
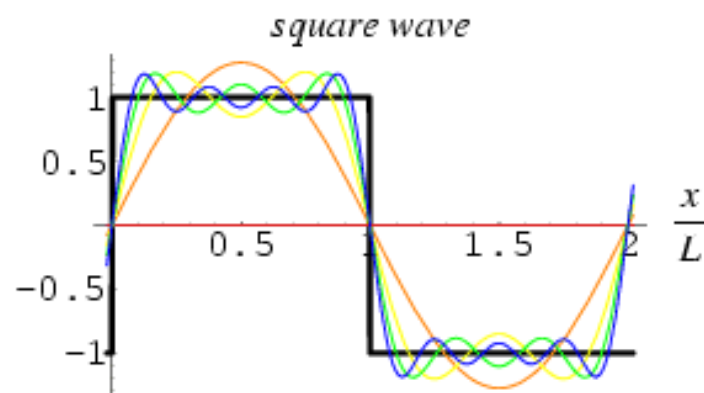
Inte heller Lagrange, Laplace,
Poisson och andra stora peruker
Inte översatt till engelska förrän
1878!

Men det är sant!

Det kallades **Fourier Series**
Kanske den största verktyget
används i tekniken idag



Approximering av olika periodiska signaler



Testa på <http://www.falstad.com/fourier/>

I appleten: Välj en signalform, dra i reglaget "Number of Terms" för att se hur man med fler och fler sinus/cosinustermer får en allt bättre approximation.

Fourierserie

Varje periodisk signal kan representeras med en serie av sinus- och cosinusfunktioner.

$$f(t) = \underbrace{a_0}_{\text{DC}} + \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \frac{2\pi kt}{T}}_{\text{Jämn}} + \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin \frac{2\pi kt}{T}}_{\text{Udda komponenten}}$$

T är perioden av alla signaler

grundvinkelfrekvens

$$\omega_0 = 2\pi/T$$

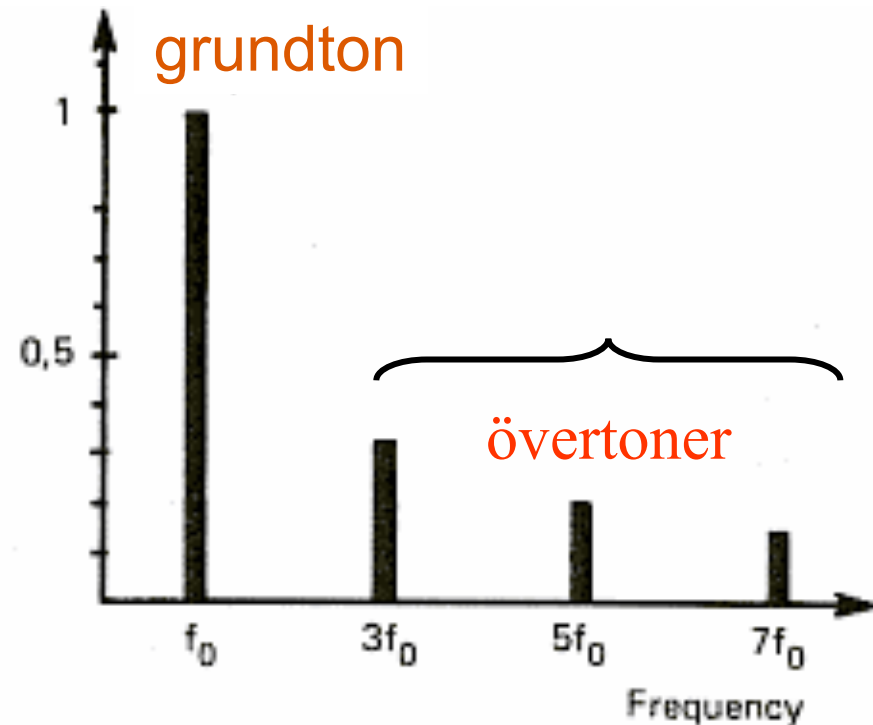
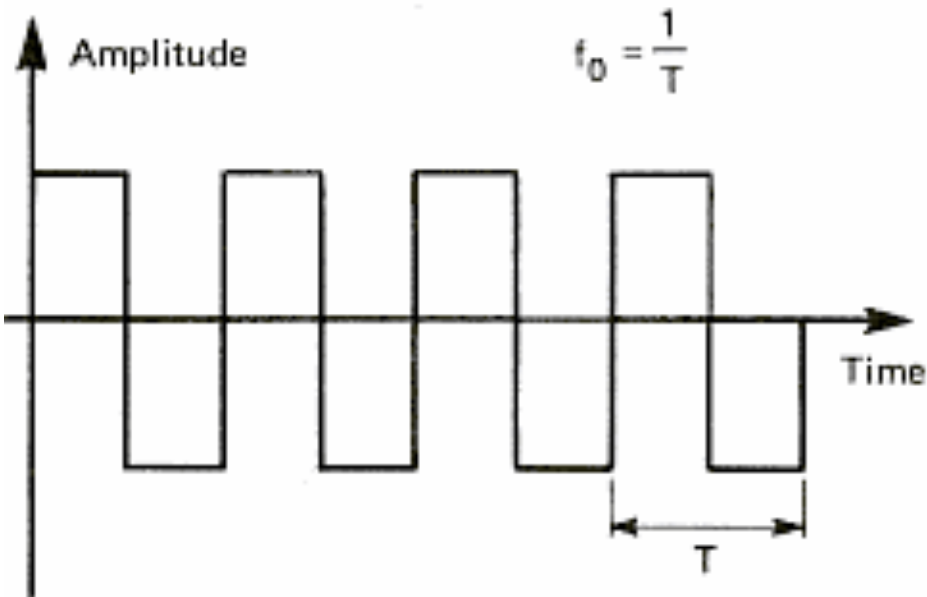
Reella Fourierserie

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\omega_0 t) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(k\omega_0 t)$$

Frekvensspektrum

Funktionerna är integrerade övertoner av grundfrekvensen "f" ($k\omega_0$) hos den sammansatta signalen.

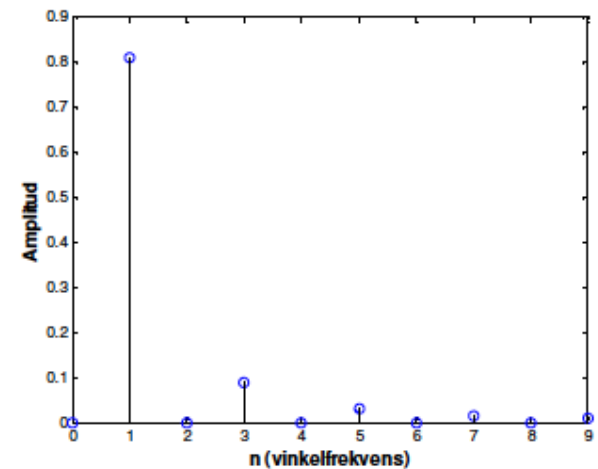
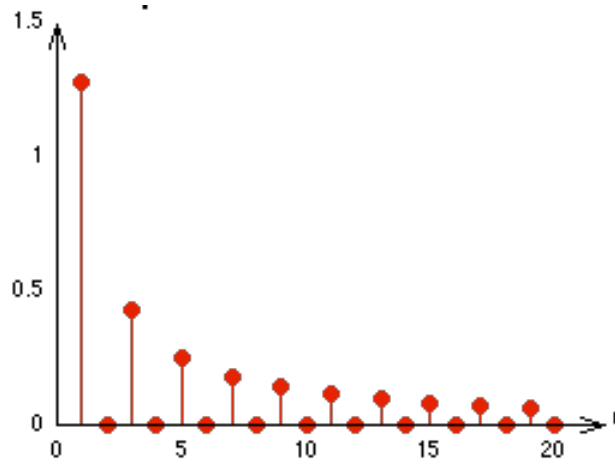
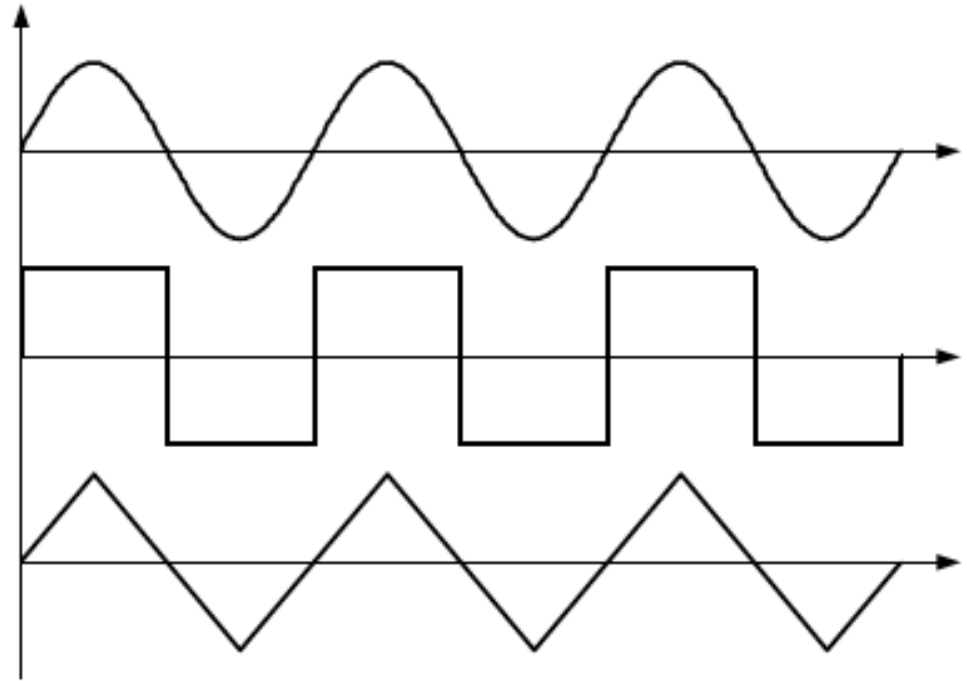
$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\omega_0 t) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(k\omega_0 t)$$



Frekvensspektrum

Alla signaler har samma grundfrekvens

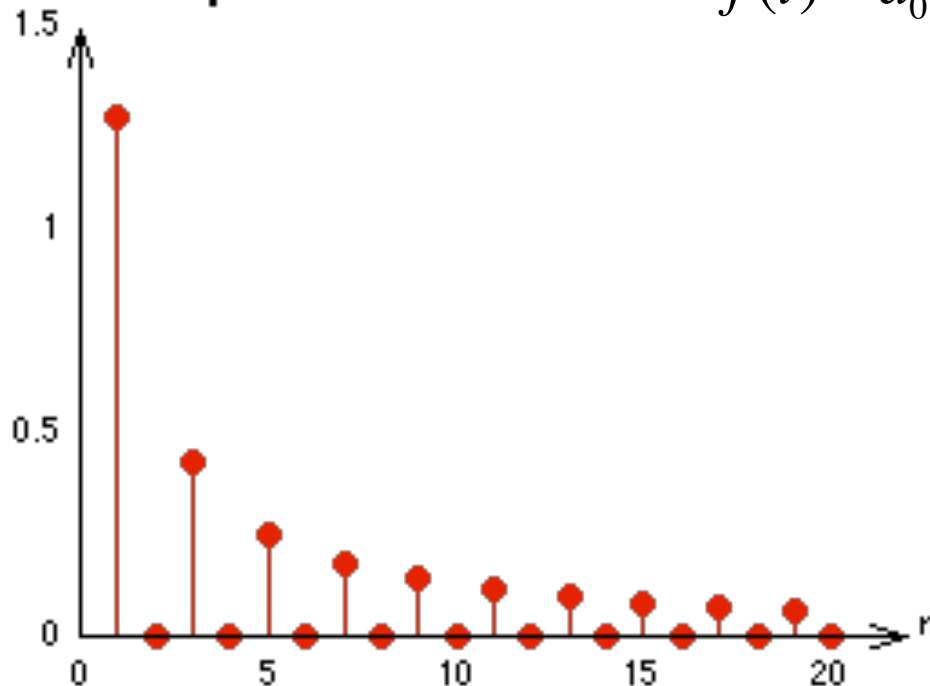
Vad gör det att de skiljer sig från varandra?



Är det något mer, som har dessa signaler gemensamt?

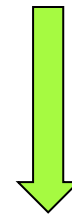
Frekvensspektrum

Fourier serie av en udda funktion är en udda funktion



Amplitud spektrum av fyrkant våg

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\omega_0 t) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(k\omega_0 t)$$

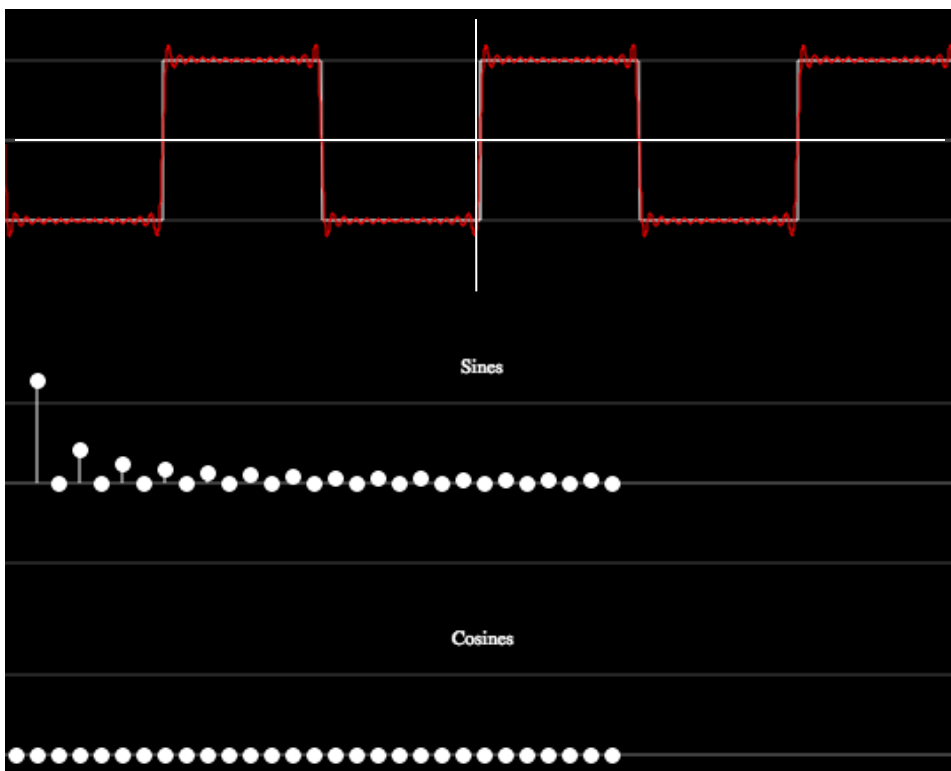


$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(k\omega_0 t)$$

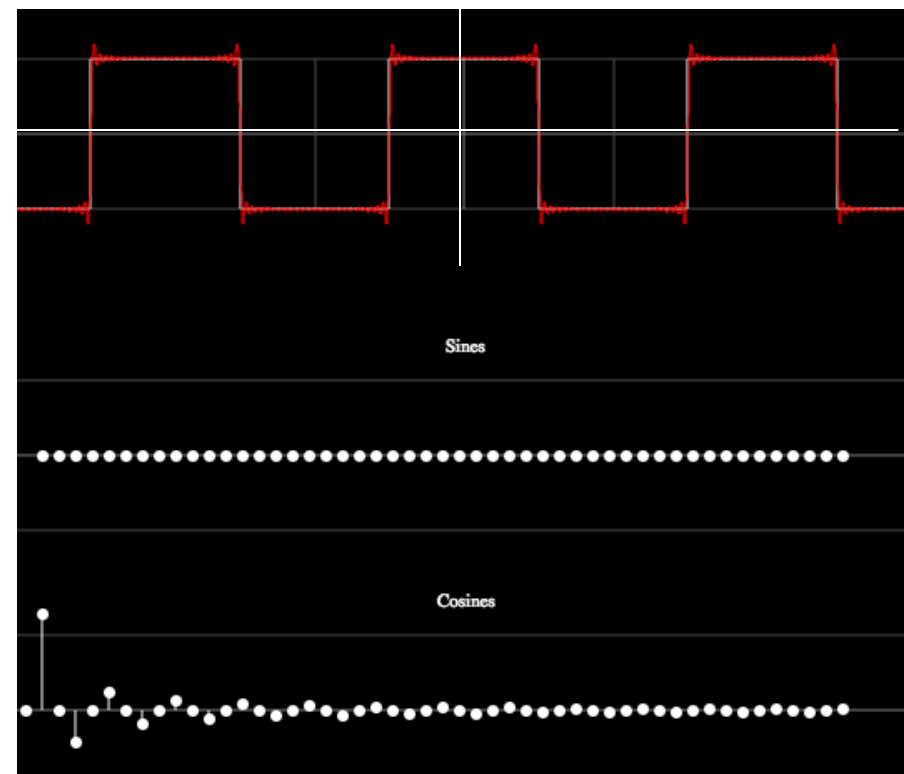
Frekvensspektrum

Hur är det med jämna signaler?

Original fyrkant



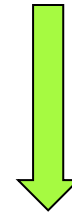
Fyrkant tidsförskuten om 90°



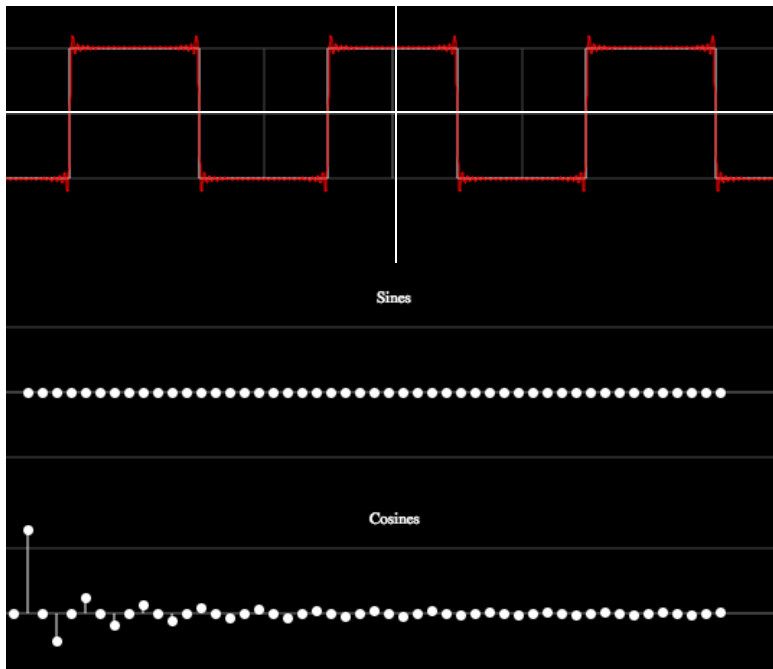
Frekvensspektrum

Fourier serie av en jämn funktion är en jämn funktion

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\omega_0 t) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(k\omega_0 t)$$

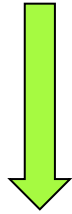


$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\omega_0 t)$$



Exponentiell form av Fourier serier

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\omega_0 t) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(k\omega_0 t)$$



$$f(\theta) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(c_k e^{jk\theta} + c_{-k} e^{-jk\theta} \right)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\theta}$$



Eulers formel

$$\cos(\theta) = \frac{1}{2} (e^{j\theta} + e^{-j\theta})$$
$$\sin(\theta) = \frac{1}{2j} (e^{j\theta} - e^{-j\theta})$$

Hur beräknar vi koefficienterna?

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}$$

Man kan visa att konstanterna C_k kan beräknas utifrån den signal $x(t)$ som man vill approximera

$$c_k = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

$$c_0 = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt$$

**Beräkna Foursier koefficienter av
följande signal**

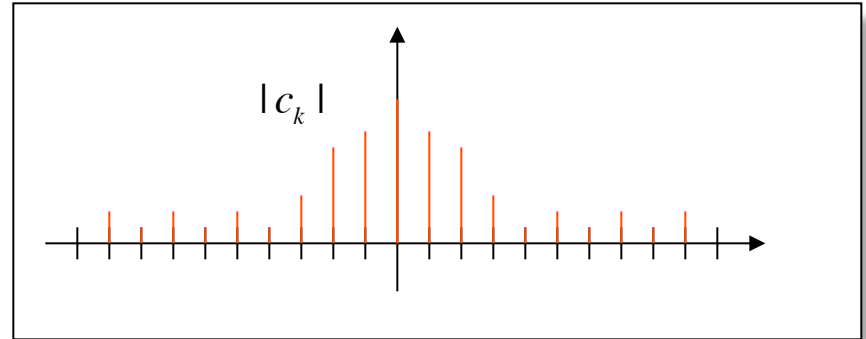
$$x(t) = \sin(4t) + \cos(8t) + 7 + \cos(16t)$$

Frekvensspektrum

Genom att plotta koefficienterna C_k som funktion av frekvensen får vi vad som kallas ett frekvensspektrum

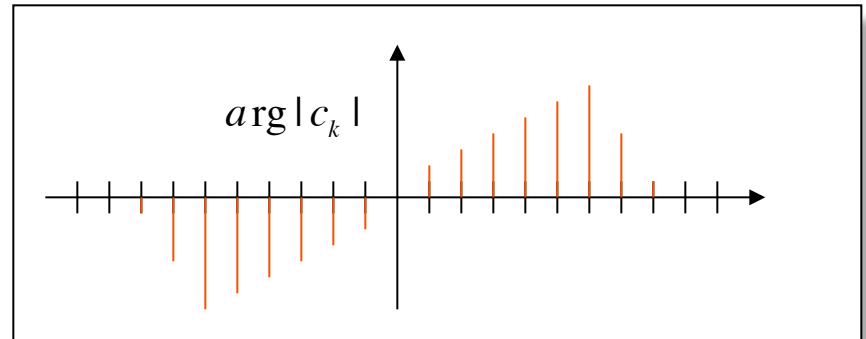
Amplitudspektrum

$$|c_k| = |c_{-k}| = \frac{1}{2} \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$$



Fasspektrum

$$\arg |c_k| = \varphi_k = \tan^{-1} \left(-\frac{b_k}{a_k} \right)$$



$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\omega_0 t) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(k\omega_0 t)$$

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}$$