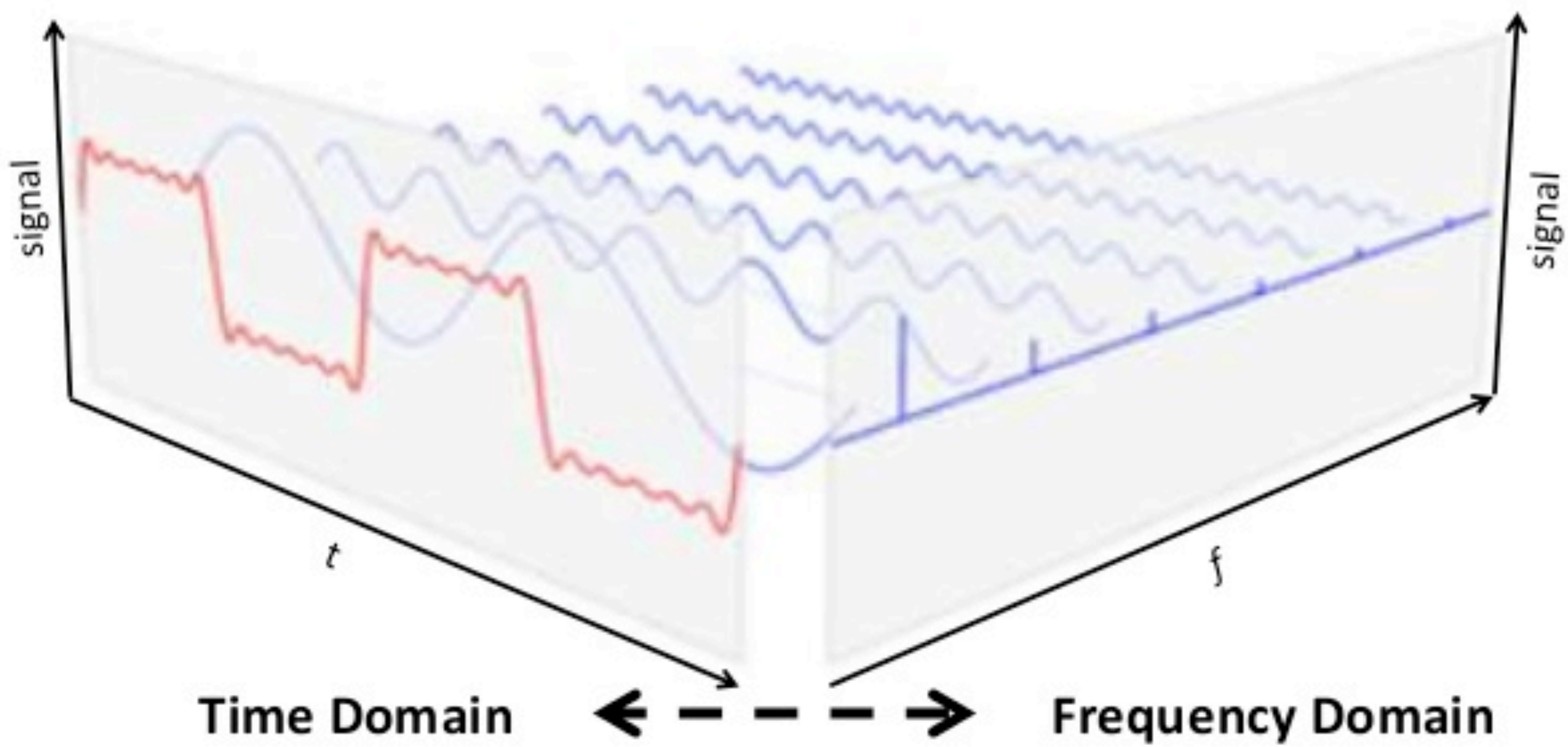
Senaste föreläsning…



Senaste föreläsning…

Reella Fourierserie

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\omega_0 t) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(k\omega_0 t)$$

Komplexa Fourierserie

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}$$

$$|c_k| = |c_{-k}| = \frac{1}{2}\sqrt{a_k^2 + b_k^2}$$

konstanterna C_k kan beräknas utifrån den signal x(t) som man vill approximera

$$c_k = \frac{1}{T}\int_0^T x(t) e^{-jk\omega_0 t}\, dt$$

$$c_0 = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\, dt$$

Senaste föreläsning…

frekvensspektrum

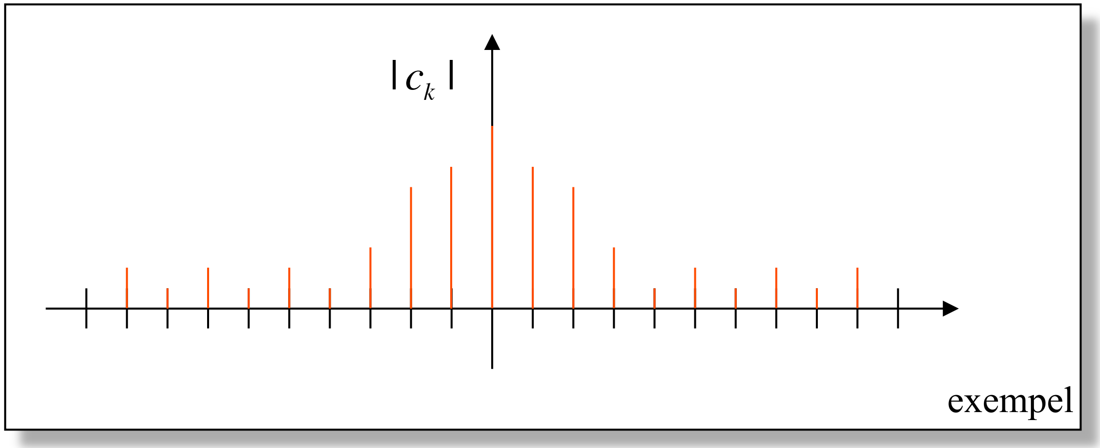
koefficienterna C_k som funktion av frekvensen

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}$$

Komplexa spektret

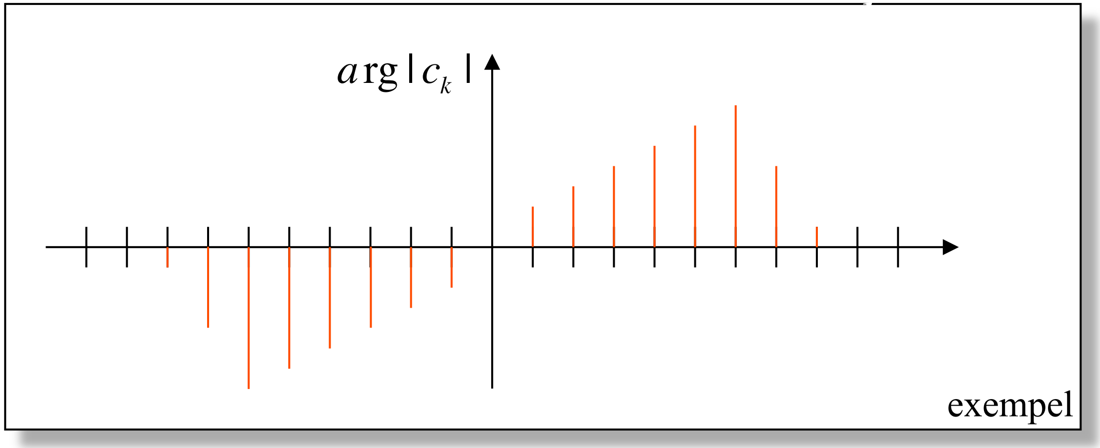
Amplitudspektrum

$$|c_k|$$

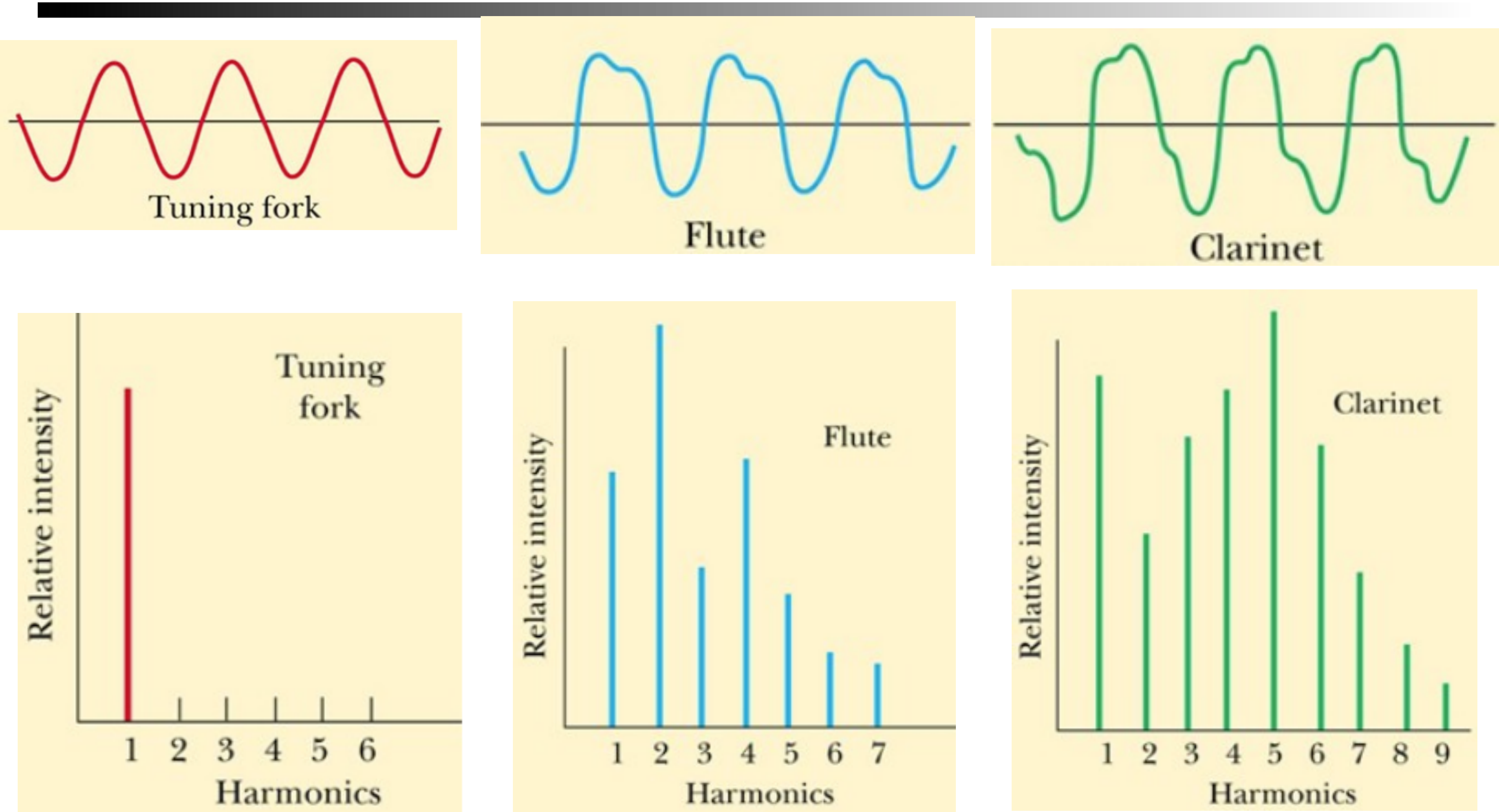


Fasspektrum

$$\arg|c_k| = \varphi_k = \tan^{-1}\left(-\frac{b_k}{a_k}\right)$$



Senaste föreläsning…



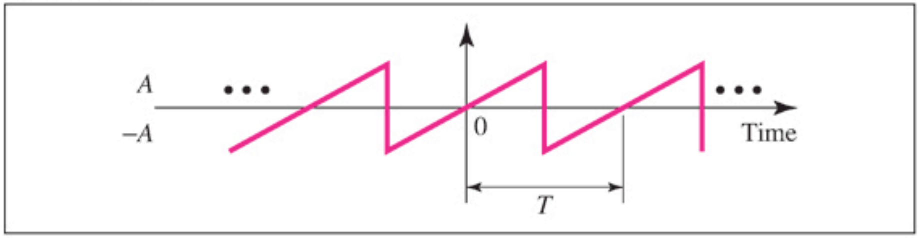
Mycket om musik akustik: http://newt.phys.unsw.edu.au/music/

Lyssna på fourierserier: http://pages.jh.edu/~signals/listen-new/listen-newindex.htm

Fourier serie: signaler och deras fourier representering

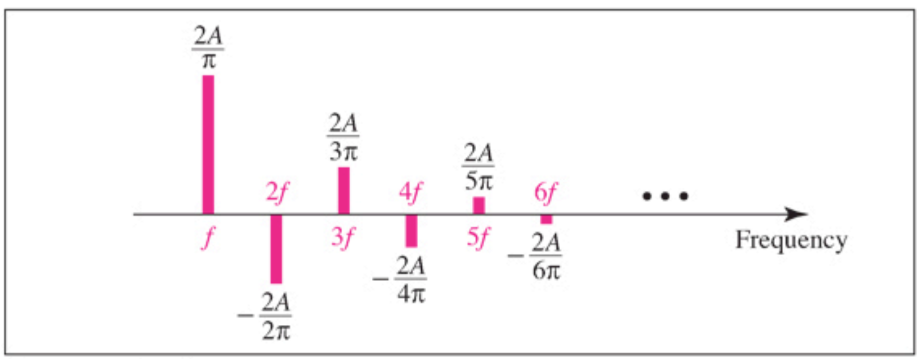
Tablar:

Time domain



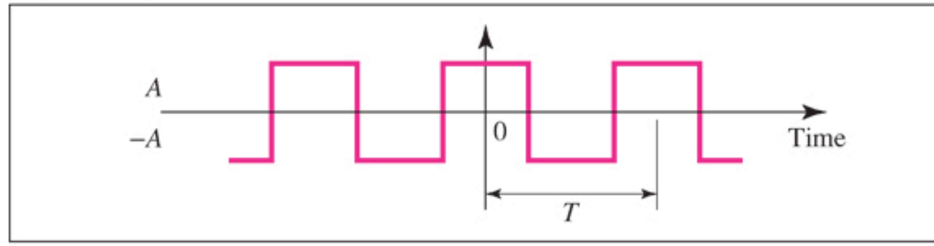
$A_0 = 0 \qquad A_n = 0 \qquad B_n = \begin{cases} \dfrac{2A}{n\pi} & \text{for } n \text{ odd} \\ -\dfrac{2A}{n\pi} & \text{for } n \text{ even} \end{cases}$

$$s(t) = \frac{2A}{\pi}\sin(2\pi ft) - \frac{2A}{2\pi}\sin(2\pi 2ft) + \frac{2A}{3\pi}\sin(2\pi 3ft) - \frac{2A}{4\pi}\sin(2\pi 4ft) + \cdots$$



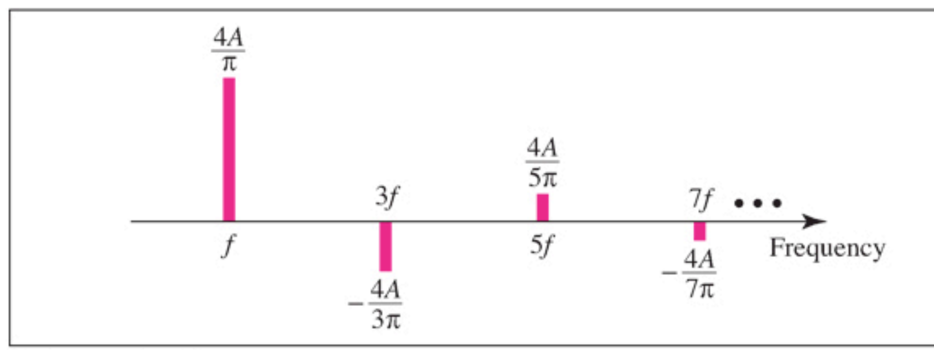
Frequency domain

Time domain



$A_0 = 0 \qquad A_n = \begin{cases} \dfrac{4A}{n\pi} & \text{for } n = 1, 5, 9, \ldots \\ -\dfrac{4A}{n\pi} & \text{for } n = 3, 7, 11, \ldots \end{cases} \qquad B_n = 0$

$$s(t) = \frac{4A}{\pi}\cos(2\pi ft) - \frac{4A}{3\pi}\cos(2\pi 3ft) + \frac{4A}{5\pi}\cos(2\pi 5ft) - \frac{4A}{7\pi}\cos(2\pi 7ft) + \cdots$$



Frequency domain

Idag

1. Effekt och enerisignaler
2. Fouriertransform
3. Egenskaper

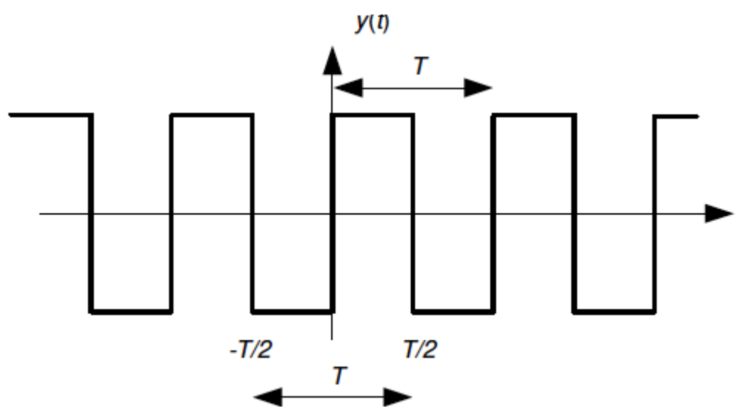
Effekt & energisignaler

Vi har inte hunnit detaljer denna gången med,
Vi tar det vid nästa föreläsningen

Ett annat sätt att dela signaler:

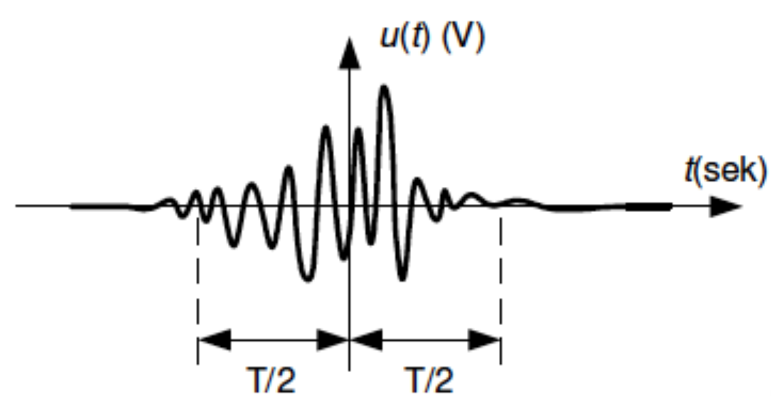
Effektsignal

signal med ändlig effekt
tex periodiska signaler



Energisignal

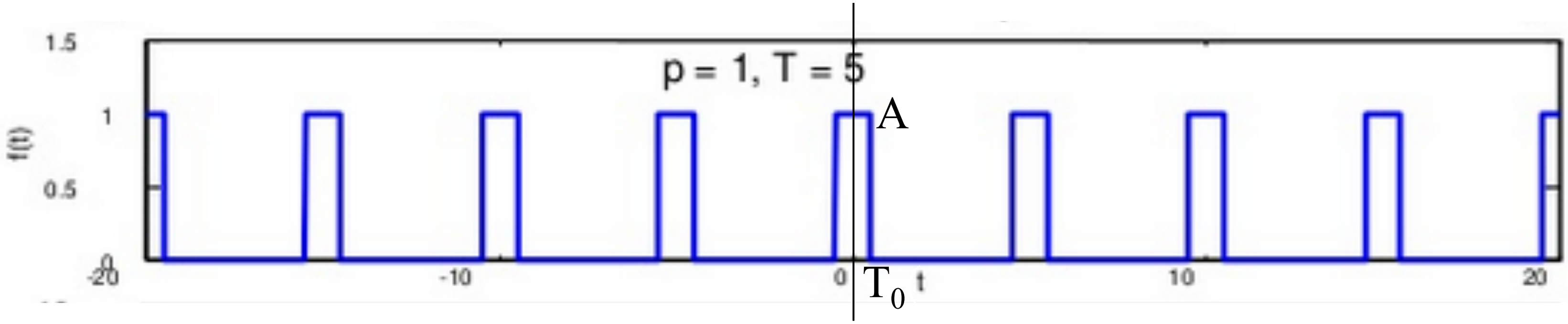
signal med ändlig energi
tex transienter



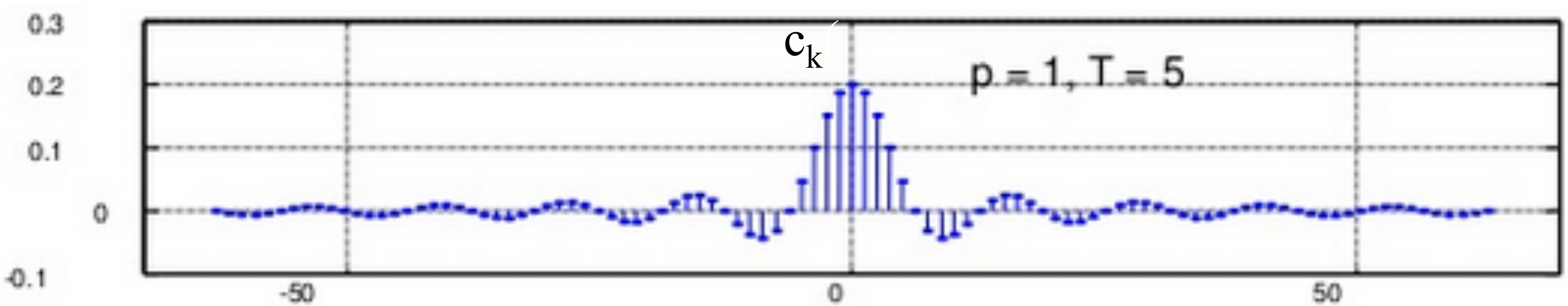
Tip: energisignal går mot 0 i båda oändligheterna

Fouriertransformen för analoga signaler

Frekvensspektrum av fyrkantvåg



$$c_k = \frac{TA}{T_0}\frac{\sin(k\omega_0 \frac{T}{2})}{k\omega_0 \frac{T}{2}} = \frac{TA}{T_0}\text{sinc}\,(k\omega_0 \frac{T}{2})$$

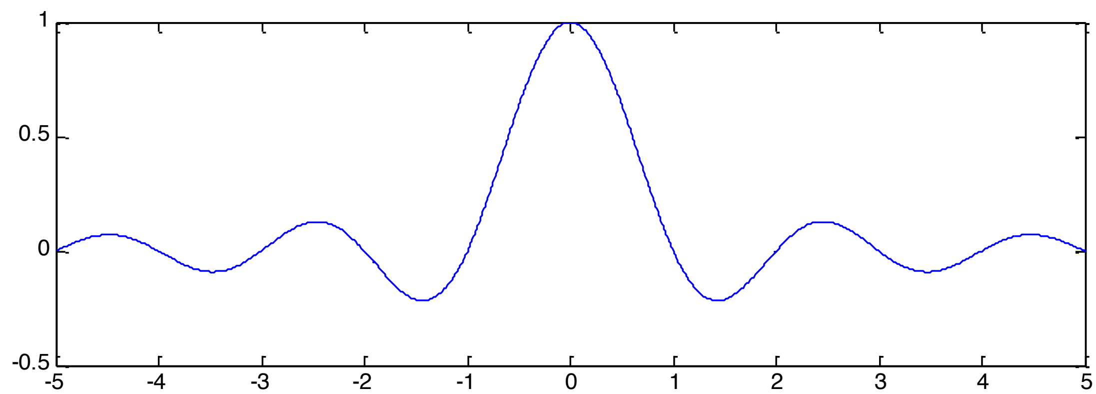


Obs! C_k ej spektrum

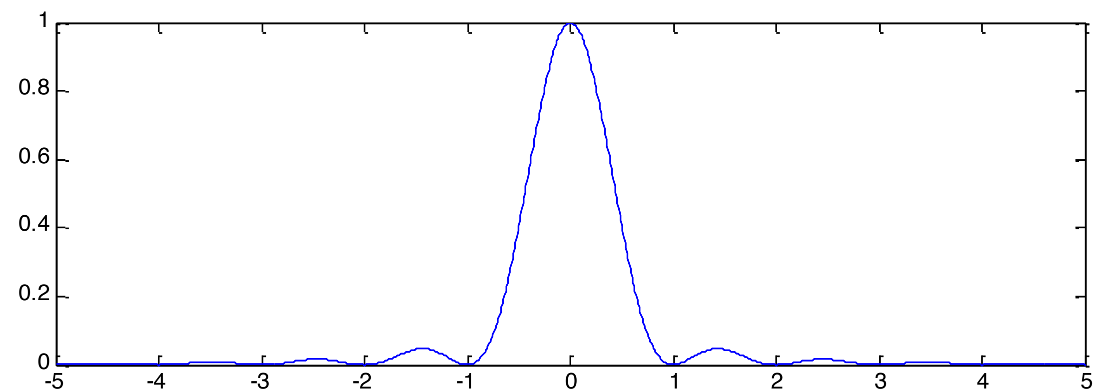
Funktion Sinc

$$\text{sinc}\,(x) = \frac{\sin(x)}{x}$$

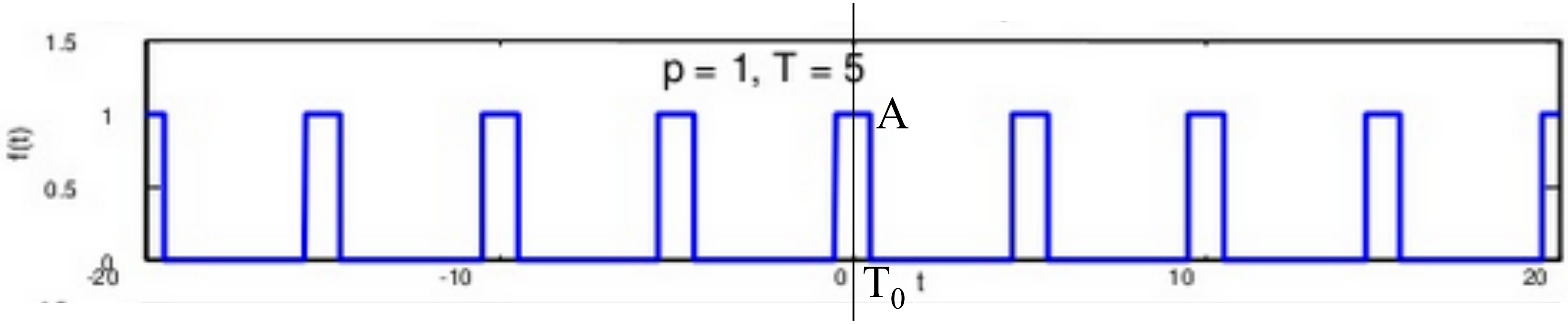
Sinc(x)



$\text{Sinc}^2(x)$



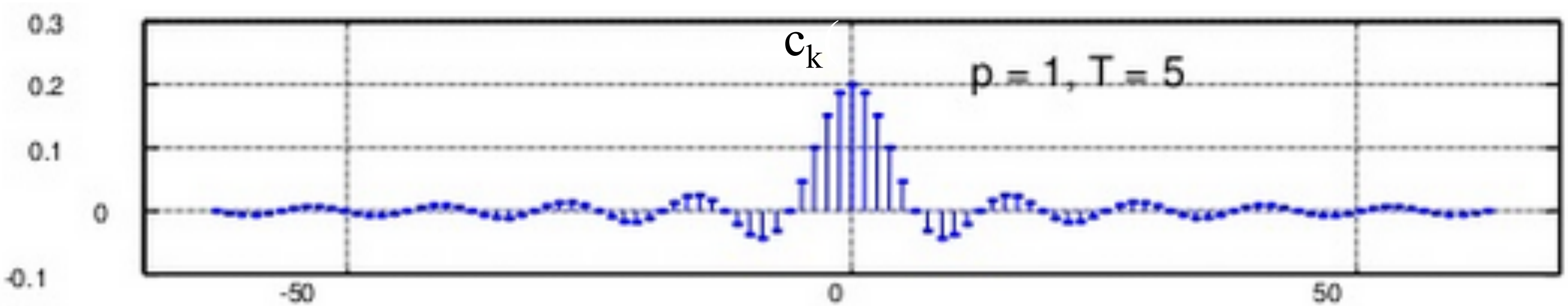
Samband mellan period och frekvens



$$c_k = \frac{TA}{T_0}\frac{\sin(k\omega_0\frac{T}{2})}{k\omega_0\frac{T}{2}} = \frac{TA}{T_0}\operatorname{sinc}\,(k\omega_0\frac{T}{2})$$

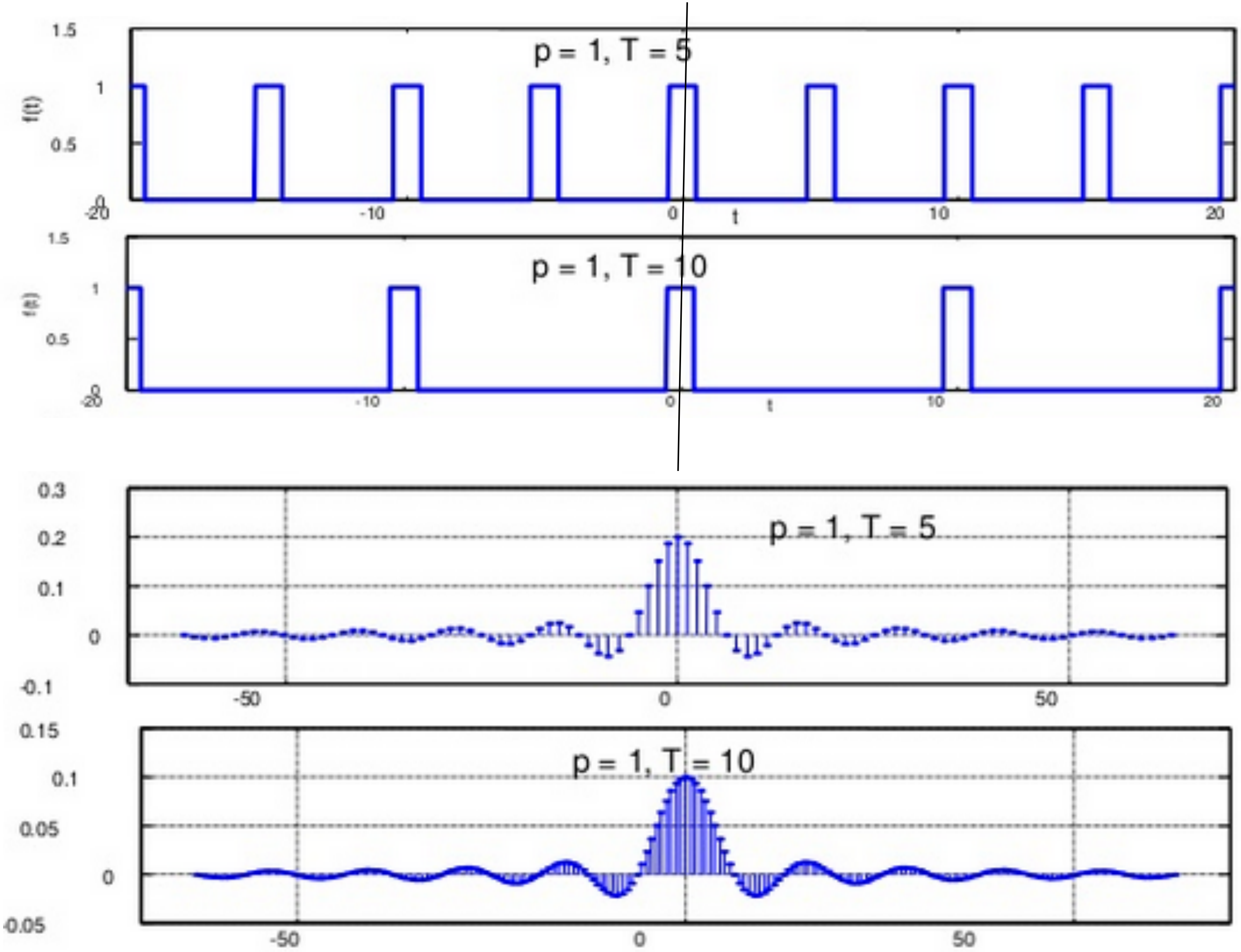
$$\boxed{\omega = 2\pi/T}$$

Vad händer med signalen i frekvensrum när perioden blir längre?

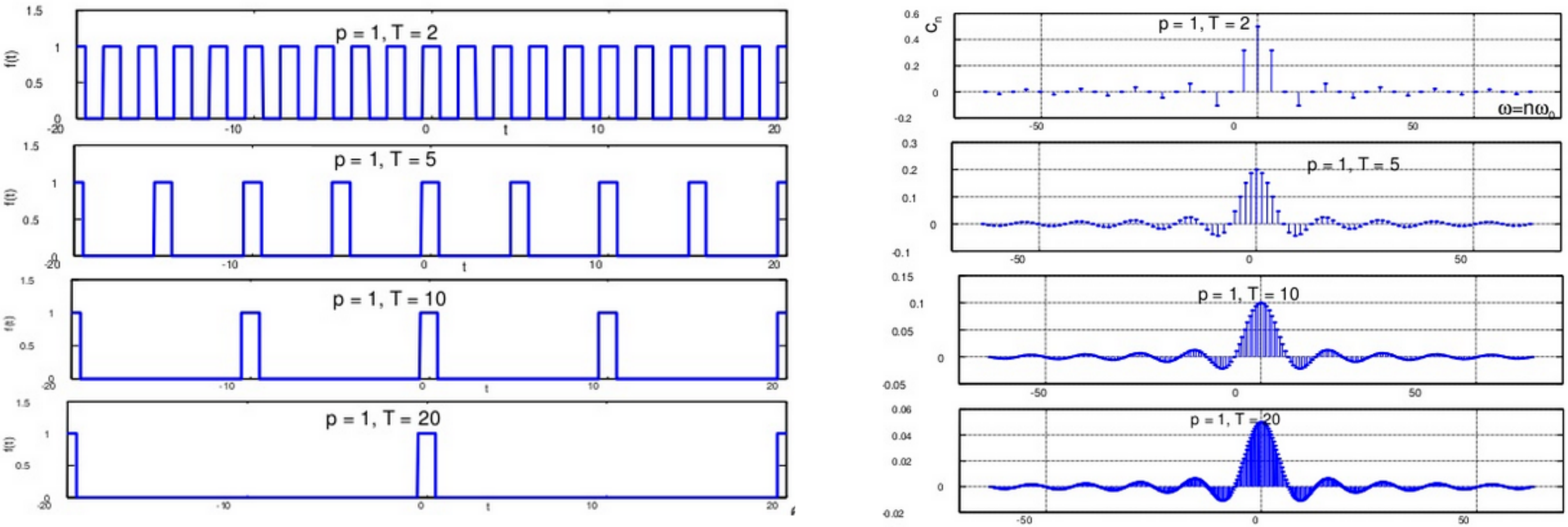


Obs! C_k ej spektrum

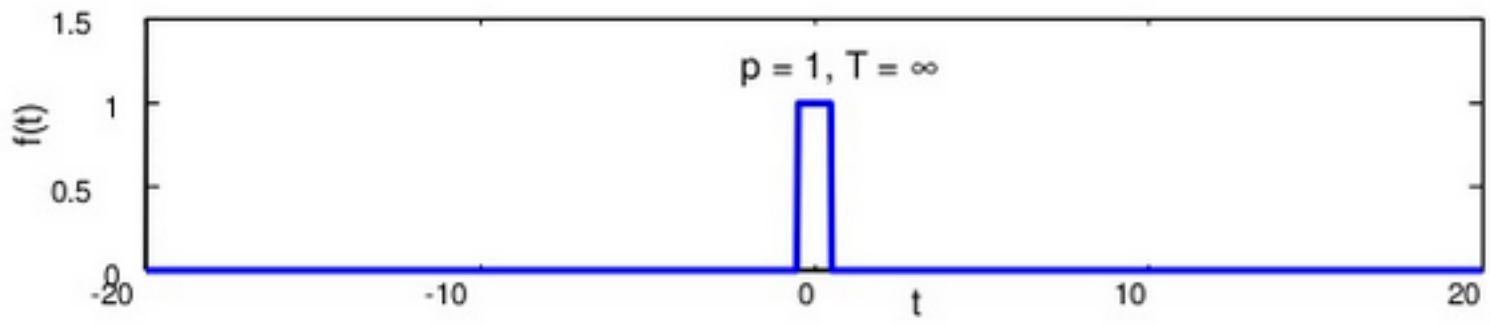
Samband mellan period och frekvens

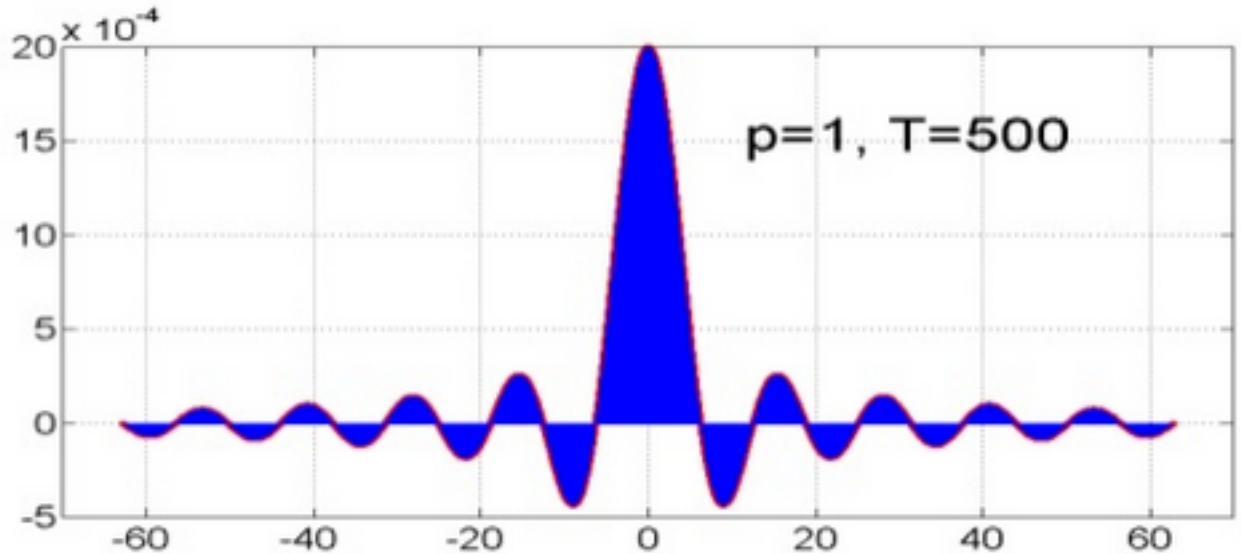


Samband mellan period och frekvens



Samband mellan period och frekvens





$k\omega_0$ övergår till att bli en kontinuerlig variabel i ω

Fouriertransform

Fourier-analys är ett verktyg som förvandrar en icke-periodisk tidsdomänsignal till en frekvensdomänsignal och vice versa.

Fourier transform

En kontinuerlig tidsdomän signal $x(t)$ och dess frekvensdomän, Fourier transform signal, $X(j\omega)$, är relaterad med:

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t}\, dt$$

Analys

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t}\, d\omega$$

Syntes

This is denoted by:

$$x(t) \overset{F}{\leftrightarrow} X(j\omega)$$

till exempel:

$$e^{-at} u(t) \overset{F}{\leftrightarrow} \frac{1}{a + j\omega}$$

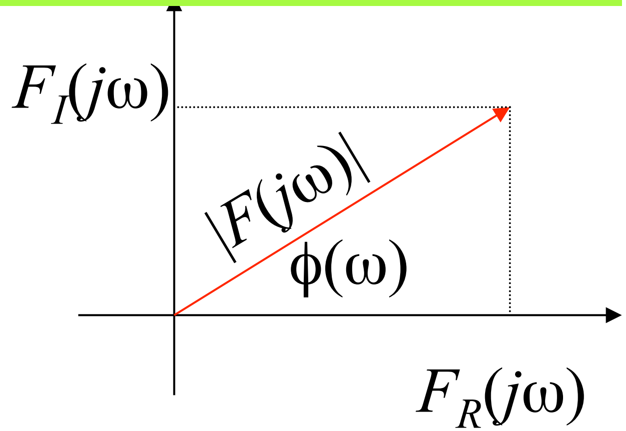
Kom ihåg

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}$$

$$c_k = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-jk\omega_0 t}\, dt$$

Den kontinuerliga spektrum

Den fourier transormerad signal $X(j\omega)$, representerar **frekvensinnehåll** of $x(t)$.



$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt$$

$$F(j\omega) = F_R(j\omega) + jF_I(j\omega)$$

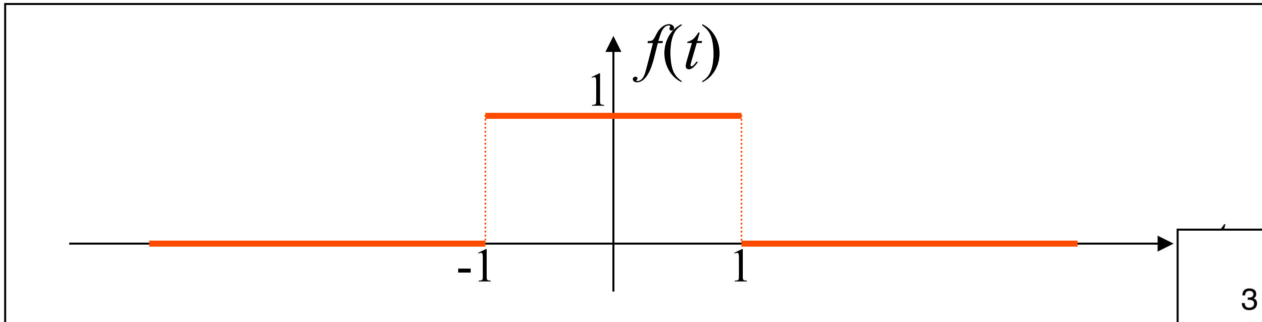
$$= \underbrace{|F(j\omega)|}_{\text{Amplitud}}\, e^{j\overbrace{\phi(\omega)}^{\text{Fas}}}$$

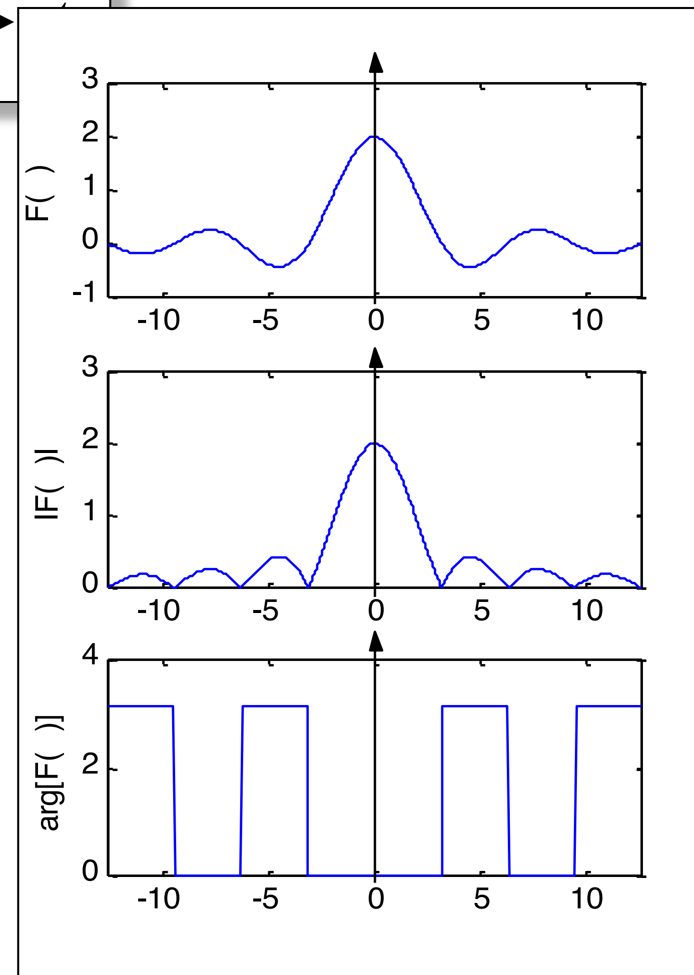
$$|F(j\omega)| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\arg|F(j\omega)| = \tan^{-1}\left(-\frac{b}{a}\right)$$

Analog till Fourier serier

FT: fyrkant

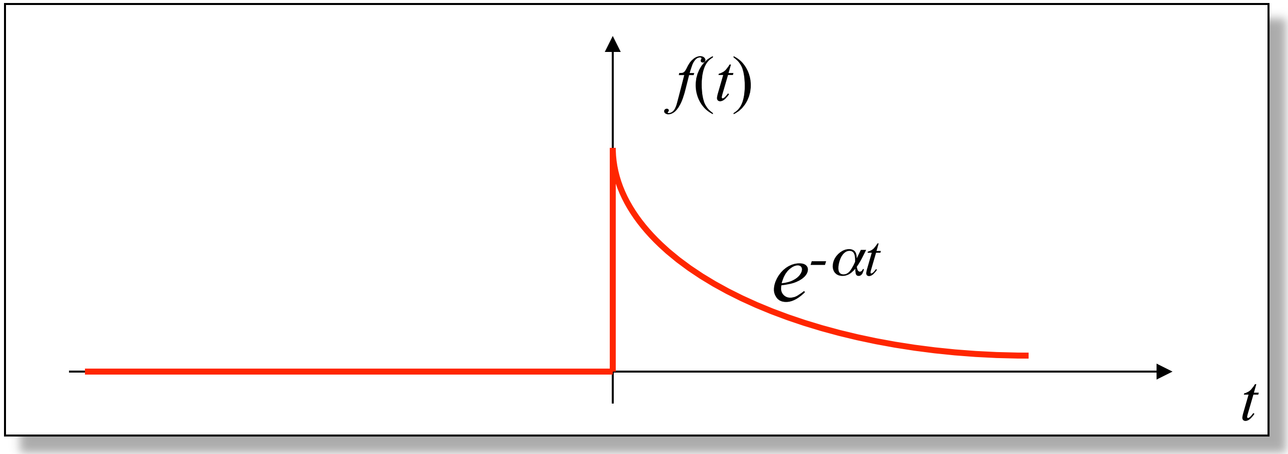




$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad = \int_{-1}^{1} e^{-j\omega t} dt \quad = \frac{1}{-j\omega} e^{-j\omega t}\Big|_{-1}^{1}$$

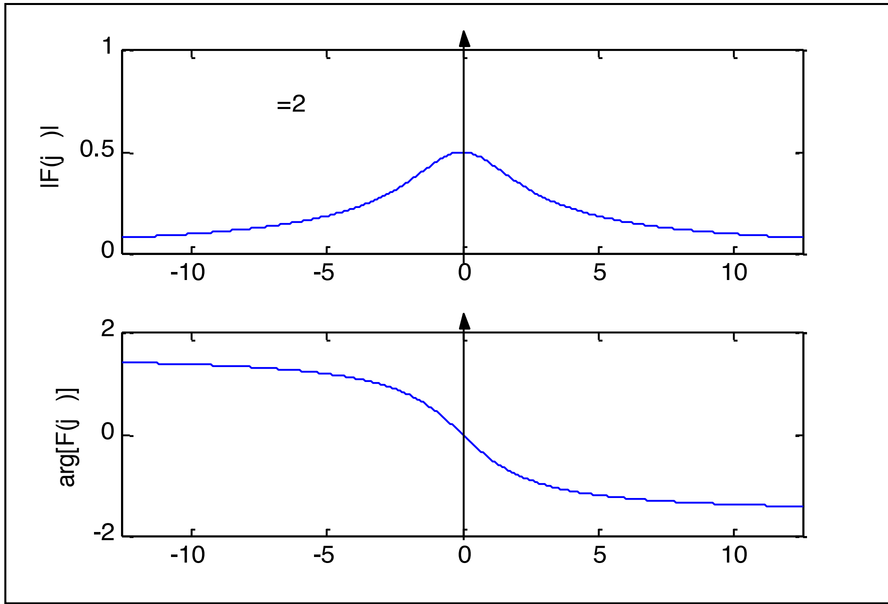
$$= \frac{j}{\omega}\left(e^{-j\omega} - e^{j\omega}\right) \quad = \frac{2\sin\omega}{\omega}$$

FT: exponentiell funktion



$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \;= \int_{0}^{\infty} e^{-\alpha t} e^{-j\omega t} dt$$

$$= \int_{0}^{\infty} e^{-(\alpha + j\omega)t} dt \;= \frac{1}{\alpha + j\omega}$$



Parceval's theorem

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df$$

den totala energi som finns i en vågform x (t) summerade över alla tiden t är lika med den totala energin hos Fourier transformerade vågformerna X (f) summerade över alla sina frekvenskomponenter f.

Egenskaper hos Fouriertransform

Fourier-analys är ett verktyg som förvandlar en icke-periodisk tidsdomänsignal till en frekvensdomänsignal och vice versa.

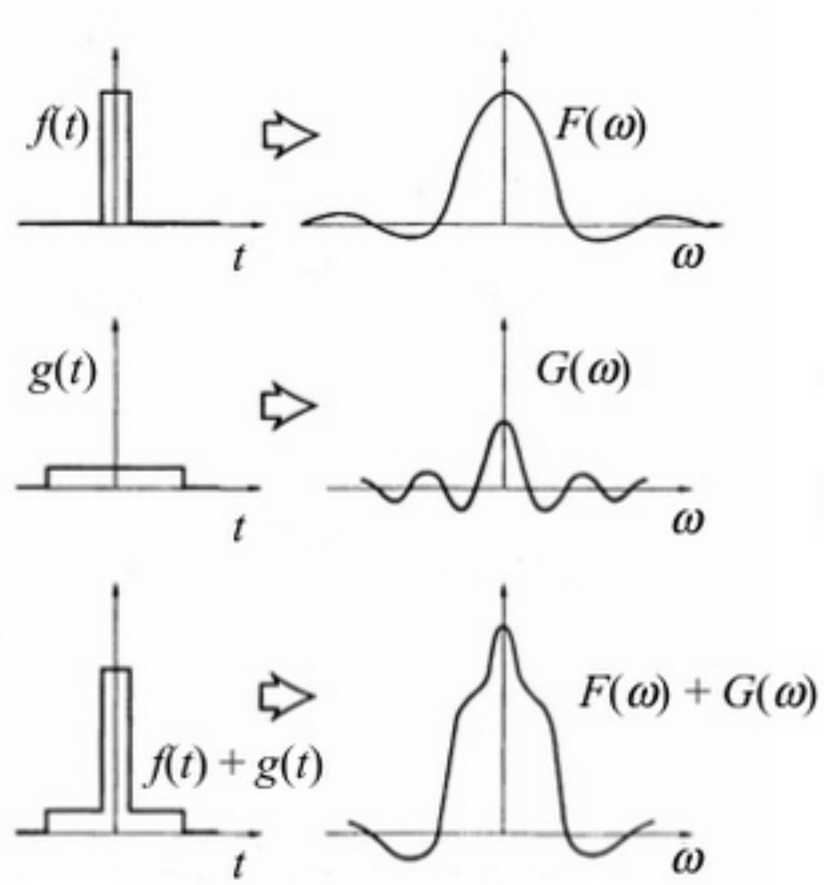
FT: Linjaritet

The Fourier transform is a **linear function** of $x(t)$

$$x_1(t) \stackrel{F}{\leftrightarrow} X_1(j\omega)$$

$$x_2(t) \stackrel{F}{\leftrightarrow} X_2(j\omega)$$

$$ax_1(t) + bx_2(t) \stackrel{F}{\leftrightarrow} aX_1(j\omega) + bX_2(j\omega)$$

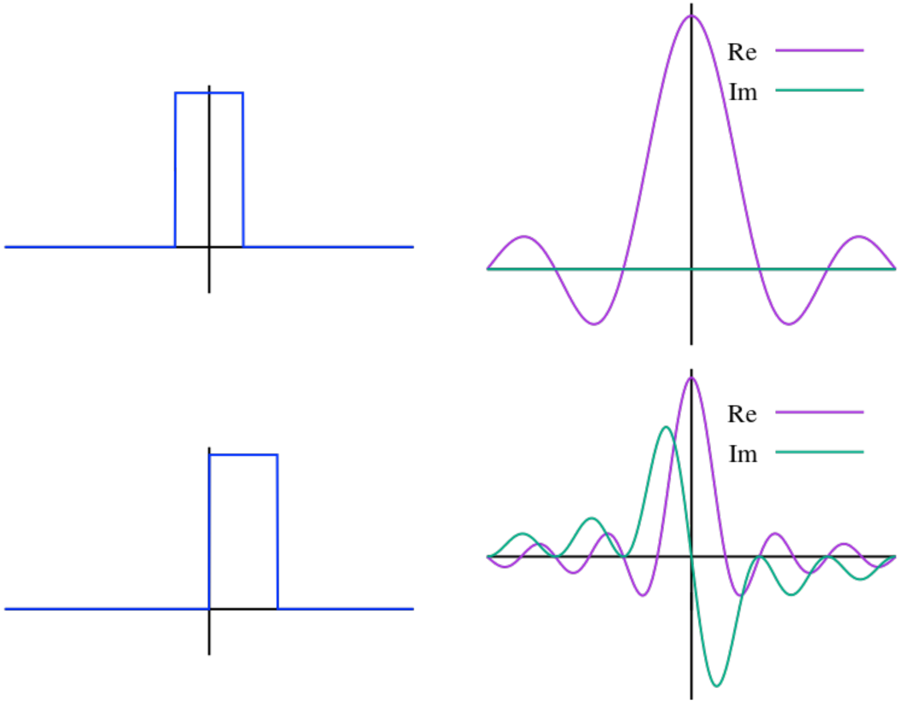


Användning:

om vi vet FTen av enkla signaler, kan vi beräkna FTen av mer komplexa signaler, som en linjär kombination av de enkla signaler

FT: Tidsfördröjt signal

$$F\{x(t-t_0)\} = e^{-j\omega t_0} X(j\omega)$$



Proof

$$x(t) = \tfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}\,d\omega$$

$$x(t-t_0) = \tfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega(t-t_0)}\,d\omega$$

$$= \tfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{-j\omega t_0} X(j\omega)\right) e^{j\omega t}\,d\omega$$

syntes ekvation för Fourier transform av $e^{-j\omega_0 t}X(j\omega)$

FT: amplitudskalade signal

$$F\{f(at)\} = \frac{1}{a}\hat{f}\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

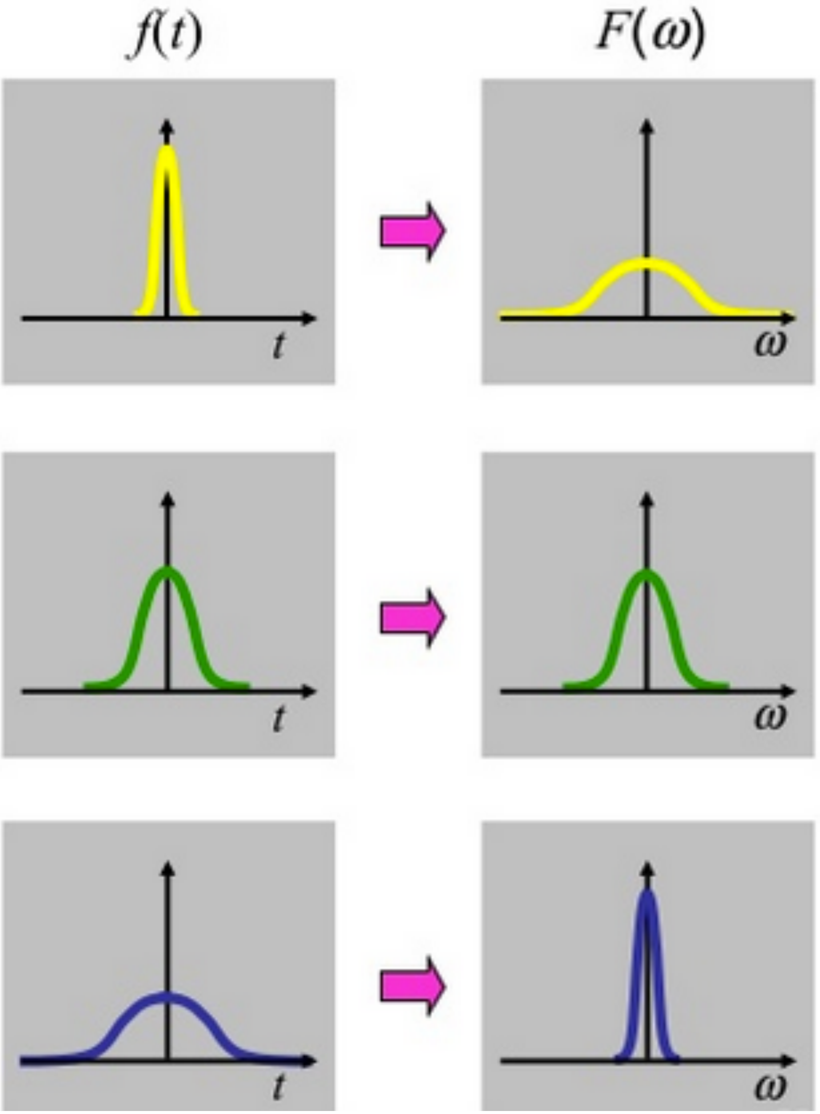
i.e. the original Fourier transform but **shifted in phase** by $-\omega t_0$

Proof

$$F\{f(at)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(at)e^{-i\omega t}dt =$$

$$\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty} f(at)e^{-i\frac{\omega}{a}(at)}d(at) =$$

$$\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty} f(t')e^{-i\frac{\omega}{a}t'}dt' = \frac{1}{a}\hat{f}\left(\frac{\omega}{a}\right)$$



FT: signal förskjuten i frekvensrum

$$F\{x(t)e^{j\omega_0}\} = X(j(\omega - \omega_0))$$

Proof

$$\mathcal{F}\{x(t)e^{j\omega_0 t}\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{j\omega_0 t}e^{-j\omega t}dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j(\omega-\omega_0)t}dt$$

$$= X\left[j(\omega - \omega_0)\right]$$

Fourier transform av derivative

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} j\omega X(j\omega)e^{j\omega t}\,d\omega$$

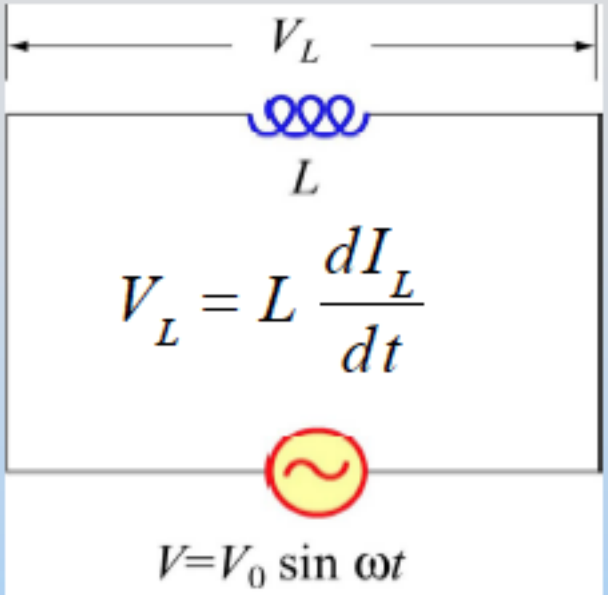
Inget annat än syntes ekvation för Fourier transform av $j\omega X(j\omega)$

$$F\{\frac{dx(t)}{dt}\} = j\omega X(j\omega)$$

vi ersätter differentiering i tidsdomänen med multiplikation (av jw)
i frekvensdomänen

$$F\{\frac{dx^{(n)}(t)}{dt}\} = (j\omega)^n X(j\omega)$$

Växelkrets: Induktor



$$V_L = L\frac{dI_L}{dt}$$

$$I_L(t) = \frac{V_0}{L}\int \sin \omega t \; dt$$

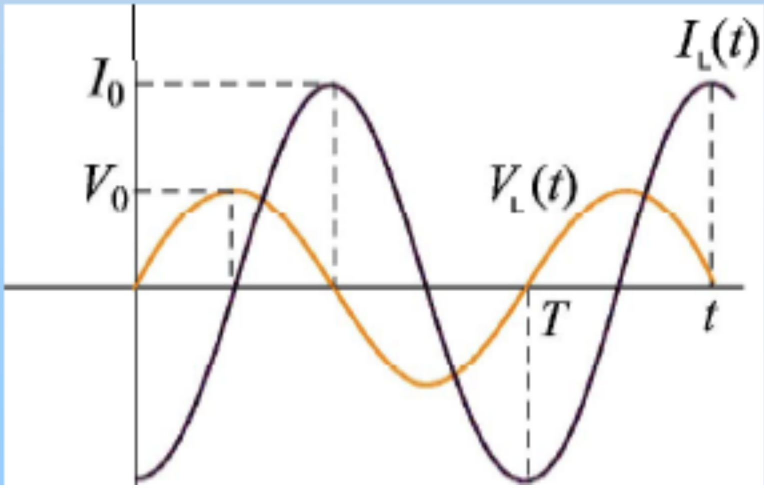
$$= -\frac{V_0}{\omega L}\cos \omega t$$

$$= I_0 \sin(\omega t - \pi/2)$$

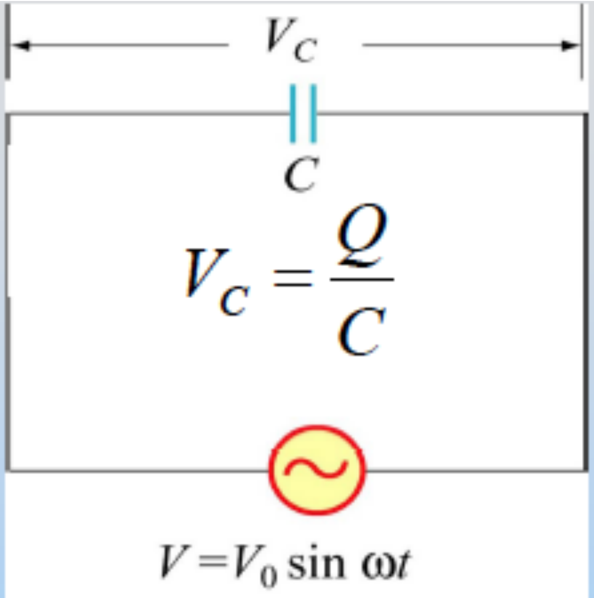
$$\boxed{I_0 = \frac{V_0}{\omega L} \qquad \phi = \pi/2}$$

$$\frac{dI_L}{dt} = \frac{V_L}{L} = \frac{V_0}{L}\sin \omega t$$

I_L **lags** V_L by $\pi/2$



Växelkrets: Kapacitor



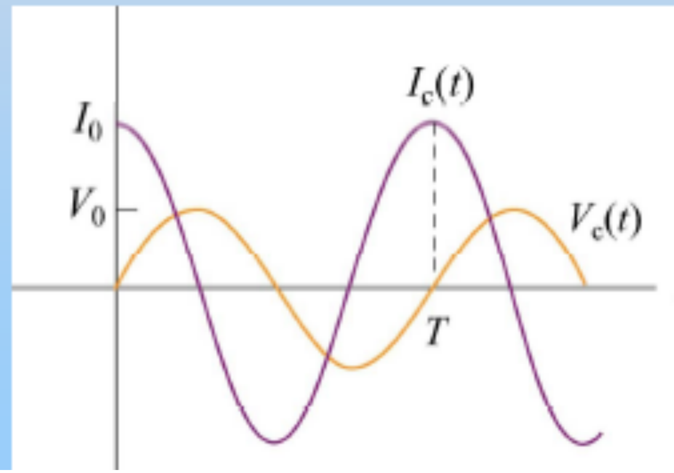
$$V_C = \frac{Q}{C}$$

$$I_c(t) = \frac{dQ}{dt} = \omega C V_0 \cos \omega t = I_0 \sin(\omega t - \pi/2)$$

$$\boxed{\begin{aligned} I_0 &= \omega C V_0 \\ \phi &= -\pi/2 \end{aligned}}$$

I_C **leads** V_C by $\pi/2$

$$Q(t) = CV_C = CV_0 \sin \omega t$$



jω-metoden

Element	I_0	Current vs. Voltage	Resistance Reactance
Resistor	$\frac{V_{0R}}{R}$	In Phase	$R = R$
Capacitor	$\omega C V_{0C}$	Leads	$X_C = \frac{1}{\omega C}$
Inductor	$\frac{V_{0L}}{\omega L}$	Lags	$X_L = \omega L$

jω-metoden är ett speciellt fall av Fourier transform

Hela poängen med (olika) transform