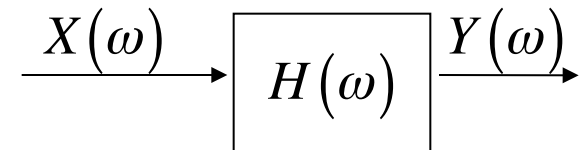
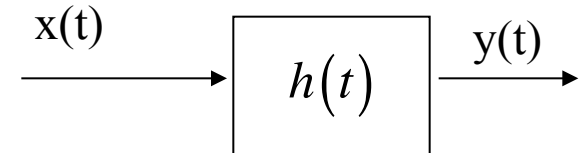


lösning 1:a ordning ODE ekvation

Bestäm LTI systemsvår (utgång $y(t)$) på en ingång signal $x(t)$.

$$h(t) = e^{-bt}u(t) \quad b > 0$$

$$x(t) = e^{-at}u(t) \quad a > 0$$



Taking Fourier transforms of both signals:

$$H(j\omega) = \frac{1}{b + j\omega}, \quad X(j\omega) = \frac{1}{a + j\omega}$$

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}$$

gives the overall frequency response:

$$Y(j\omega) = \frac{1}{(b + j\omega)(a + j\omega)}$$

Färdiga eller?

lösning 1:a ordning ODE ekvation

$$Y(j\omega) = \frac{1}{(b + j\omega)(a + j\omega)}$$

Att konvertera till tidsdomän måste vi uttrycka $Y(j\omega)$ som *partialbröksuppdelning*

$$Y(j\omega) = \frac{1}{b-a} \left(\frac{1}{(a + j\omega)} - \frac{1}{(b + j\omega)} \right)$$

Nästa föreläsning

Systemsvår är då

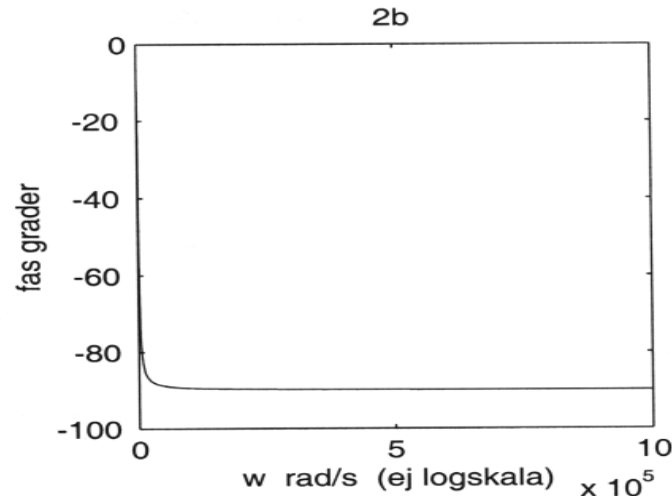
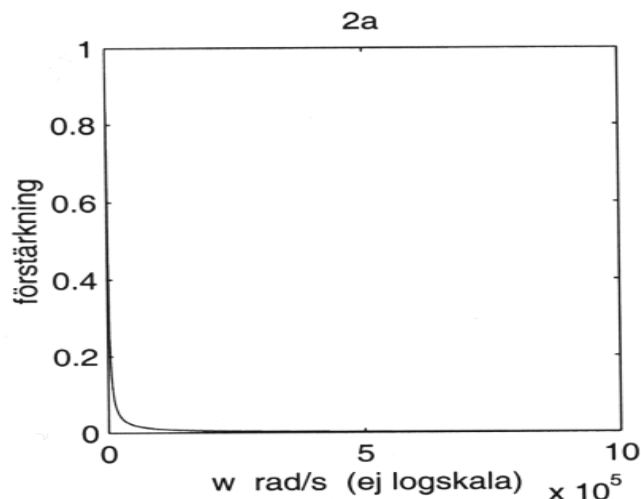
$$y(t) = \frac{1}{b-a} \left(e^{-at} u(t) - e^{-bt} u(t) \right)$$

Idag

1. **Bodediagram**
2. **Laplacetransform**
3. **Egenskaper**

Bodediagram

Frekvensspektrum



$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}$$

Bode diagram

$$|H(\omega)| \cos(\omega t + \angle H(\omega))$$

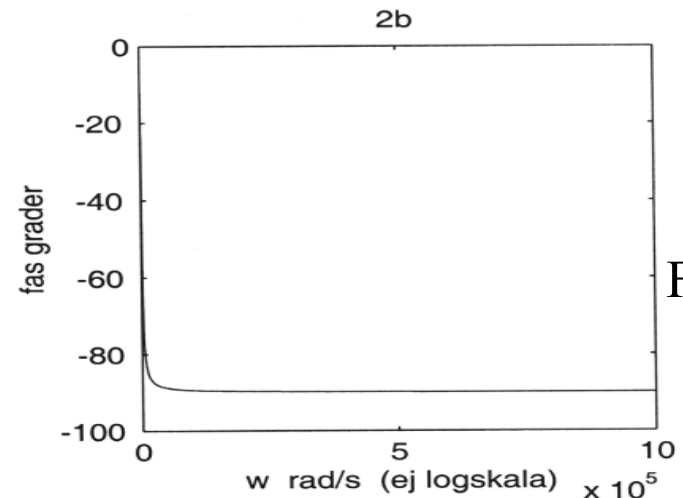
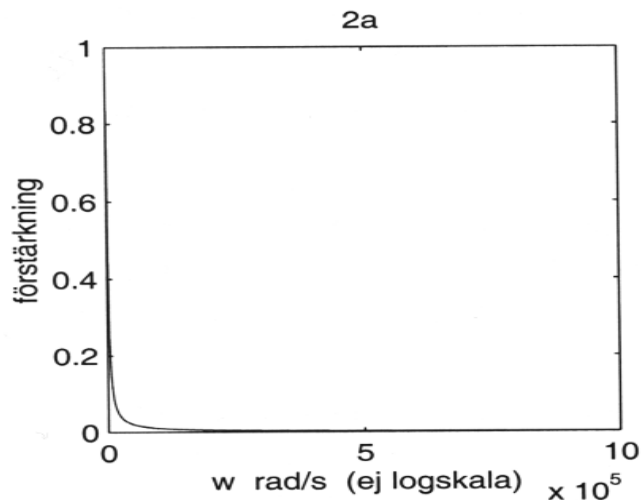
Amplitudförstärkningskurvor blir ofta ganska svårtolkade i linjär-linjär plot, istället ritar man amplitudkurvan i log-log skala.

Vidare så multiplicerar man ofta förstärkningen med 20 för att erhålla en decibelskala

vi plottar $20 \log|H(i\omega)|$ med en logaritmiskt växande frekvens

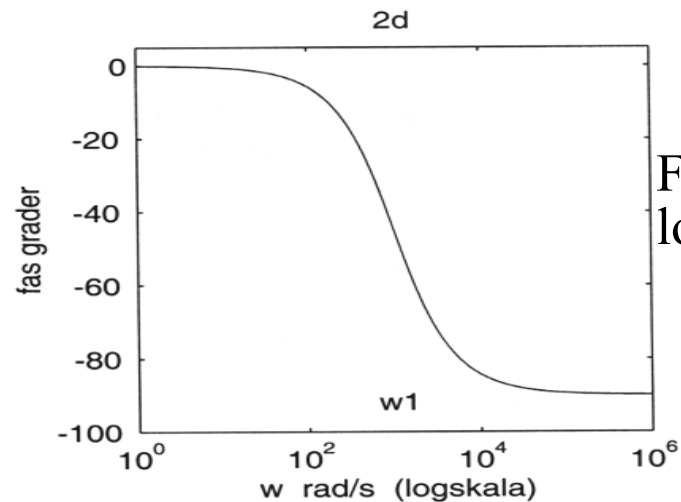
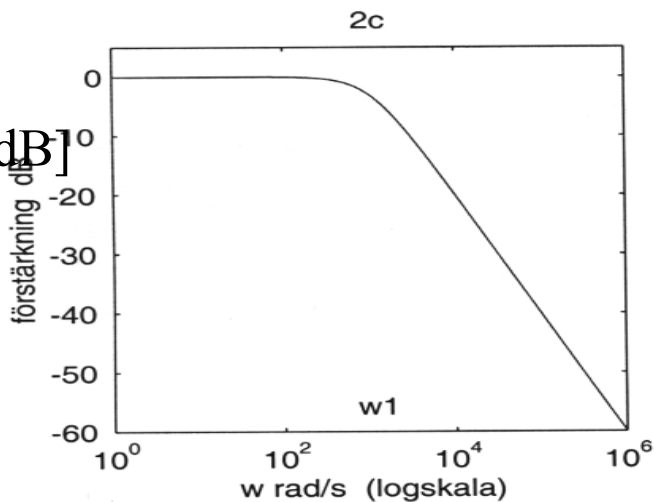
Frekvensspektrum linjär vs dB skala

Förstärkning



Fas [Grad]

Förstärkning [dB]
logskala



Fas [Grad]
logskala

Frekvens [rad/s]

Decibel

Decibel [dB] är ett logaritmiskt mått

Det används för att ange ett förhållande till ett referensvärde och definieras enligt

$$dB = 10 \log_{10} \frac{P_2}{P_1}$$

P₂: Effekt

P₁: referens värde

$$dB = 10 \log_{10} \frac{P_2}{P_1} = 10 \log_{10} \frac{U_2^2}{U_1^2} = 20 \log_{10} \frac{U_2}{U_1}$$

Decibel används ofta för att beskriva ljudnivå, elektrisk signalstyrka och digitala signaler.

Lär oss känna våra logs

Koncept :

(1) Genom decibelnummer kan vi se skillnader tidligare

$$20 \log (0.01) = -40 \text{ dB}$$

$$20 \log (0.1) = -20 \text{ dB}$$

$$20 \log (0.5) = -3 \text{ dB}$$

$$20 \log (1) = 0 \text{ dB}$$

$$20 \log (2) = 3 \text{ dB}$$

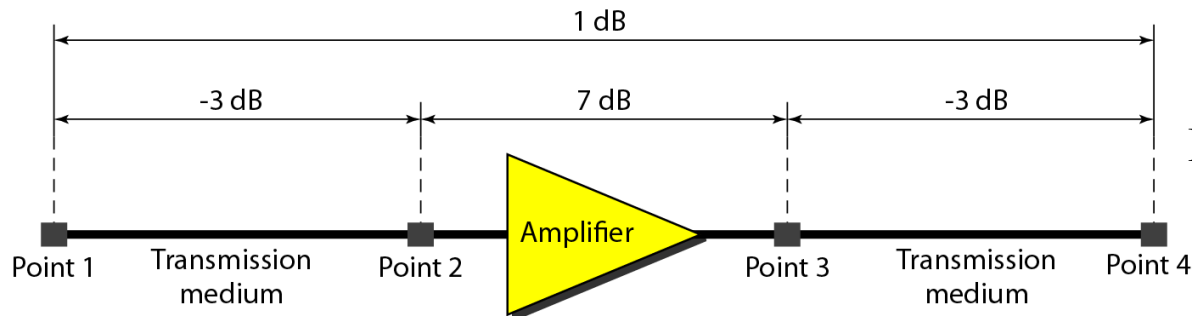
$$20 \log (10) = 20 \text{ dB}$$

$$20 \log (100) = 40 \text{ dB}$$

...

$$20 \log (1000000) = 120 \text{ dB}$$

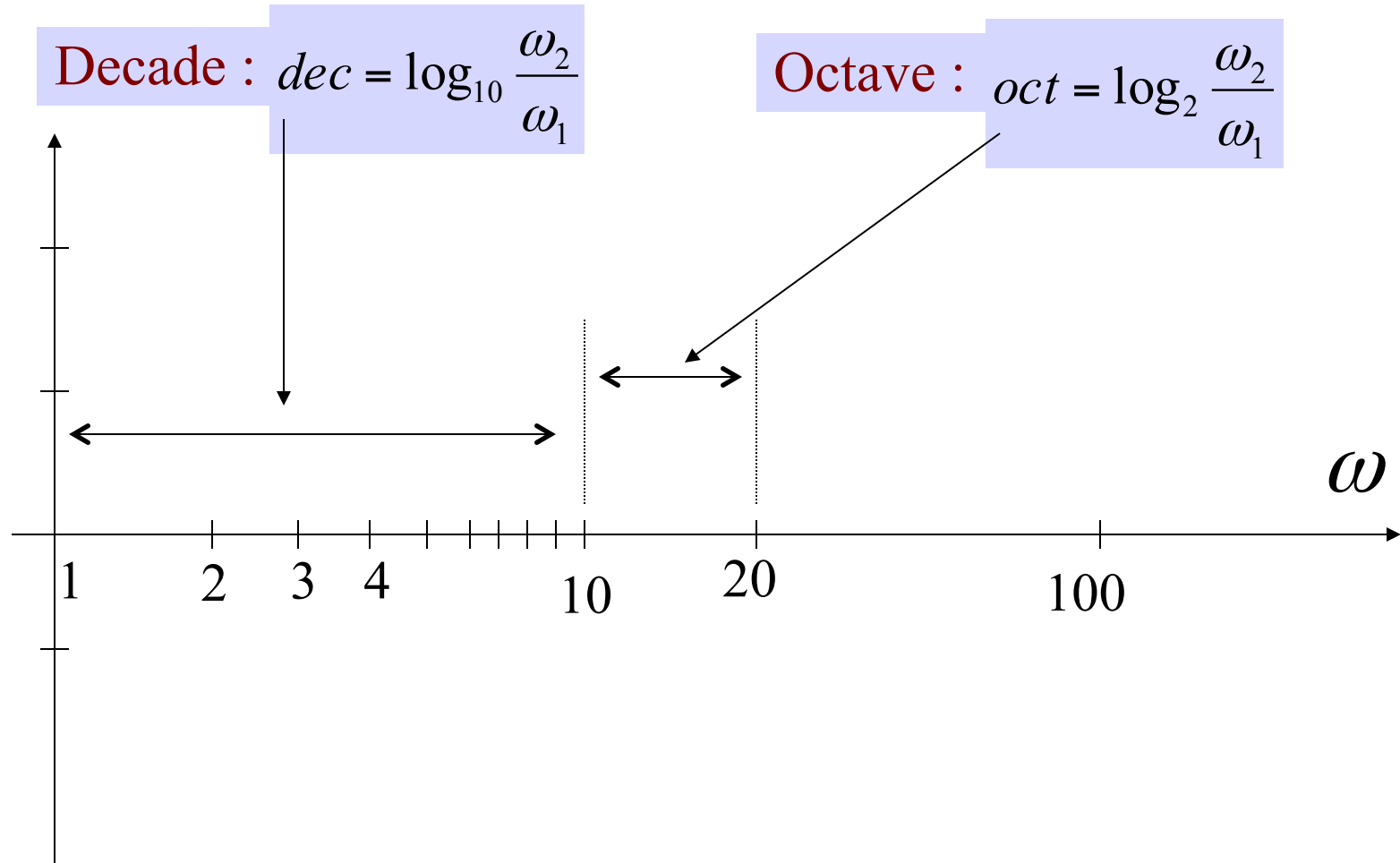
(2) decibelnummer kan läggas till (eller subtraheras) när vi mäter flera punkter (cascading) i stället för multiplikationer.



Effektförändrig mellan p1 och p4

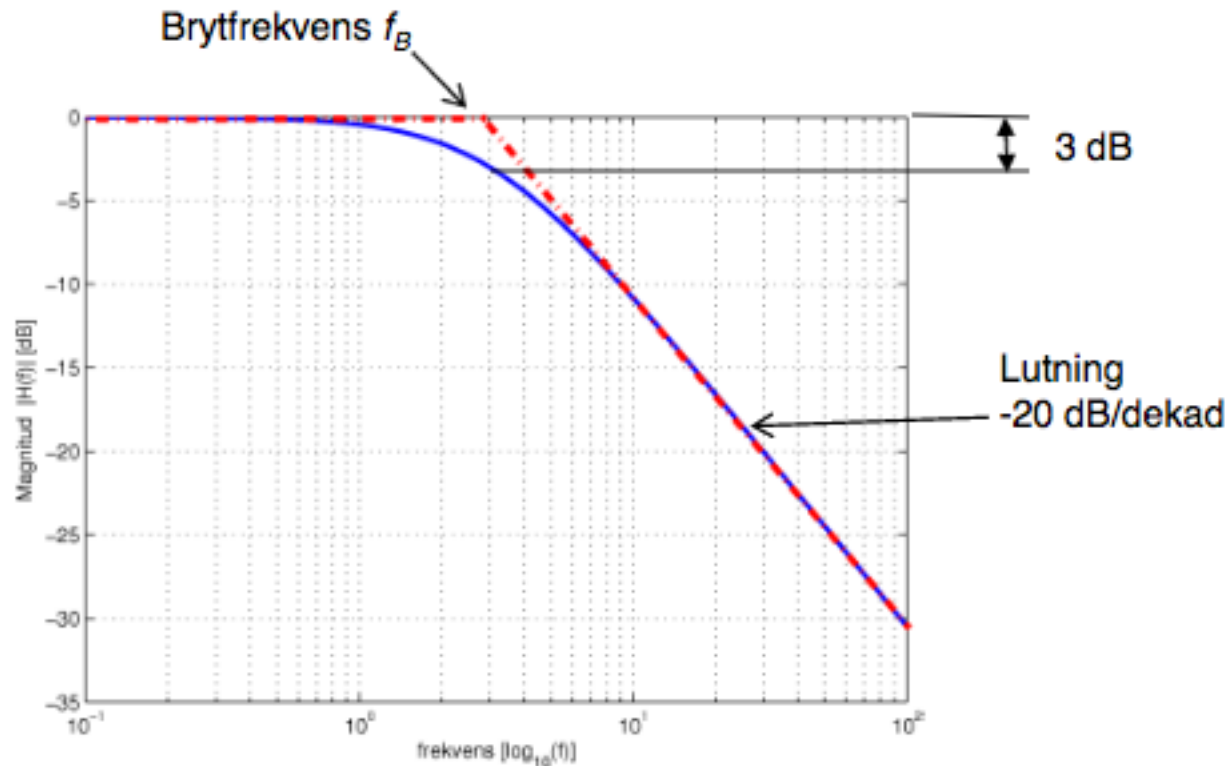
$$\text{dB} = -3 + 7 - 3 = +1$$

Liten poäng om dB



(Approximativt) Bodediagram

Inom elektronik används ofta decibel - skala för effekter och amplituder



För att variationer i amplitud ska synas lika bra vid höga frekvenser som vid låga frekvenser så används en logaritmisk frekvens-axel

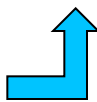
Bodediagram

En snabb teknik för att uppskatta en komplicerad överföringsfunktion med flera poler och nollor

vi skissa $|H(j\omega)|_{\text{dB}}$ och $\varphi(H(j\omega))$ som funktion av ω eller f med logaritmisk skala på ω -axeln

$$H(\omega) = k \frac{(1 + j\omega\tau_{z1})(1 + j\omega\tau_{z2}) \cdots (1 + j\omega\tau_{zn})}{(\omega^2 + j\omega\tau_{p2})(1 + j\omega\tau_{p2}) \cdots (1 + j\omega\tau_{pm})}$$

nolla 

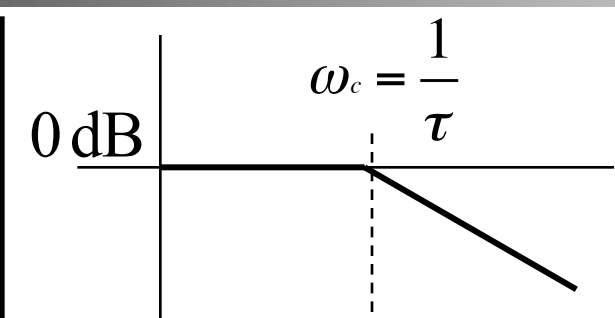
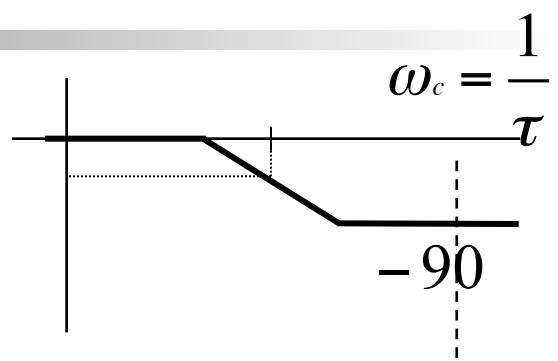
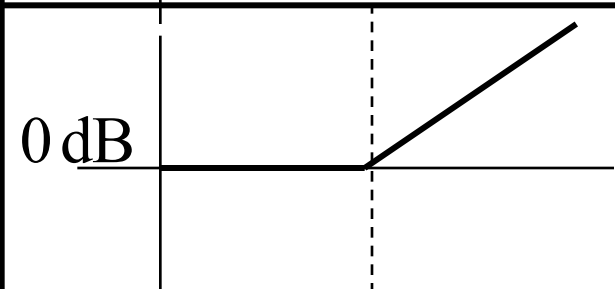
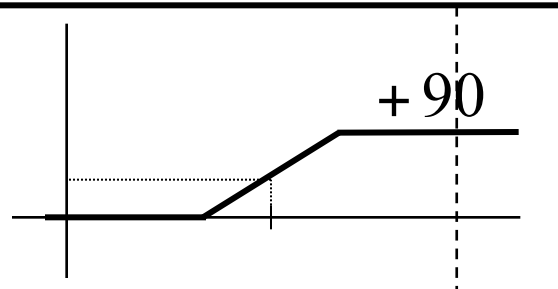
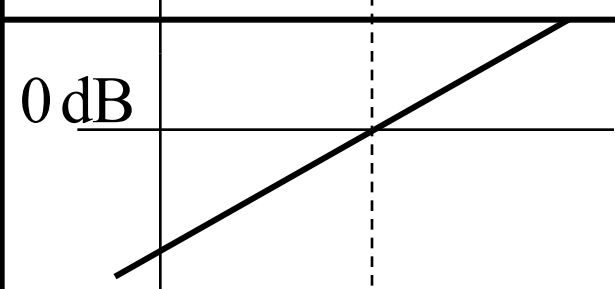
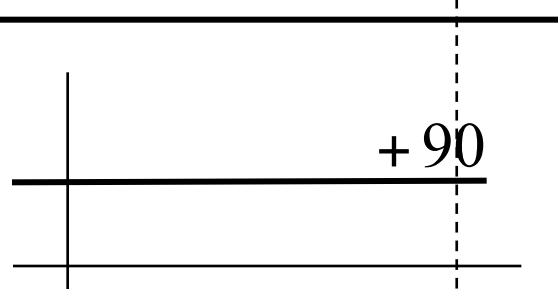
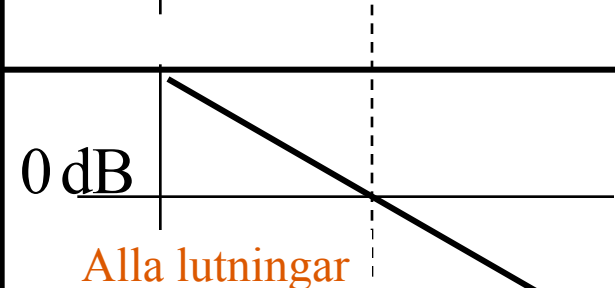
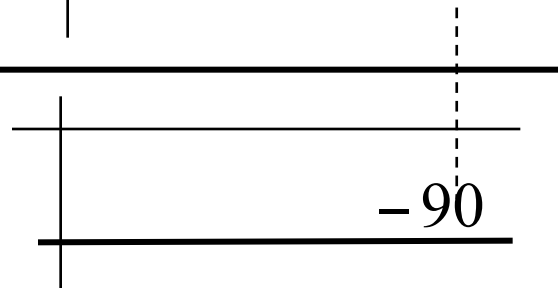
pol 

Brytfrekvens

$$\omega_c = \frac{1}{\tau_i}$$

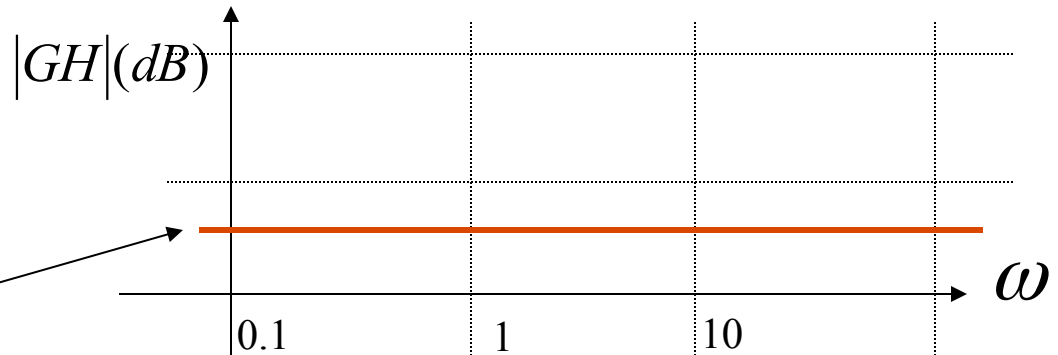
$$\begin{aligned} A_{\text{vdB}} &= 20 \log_{10} |H(j\omega)| \\ \varphi &= -\tan^{-1} (\omega / \omega_c) \end{aligned}$$

Sammanfattning av enkla individuella faktorer

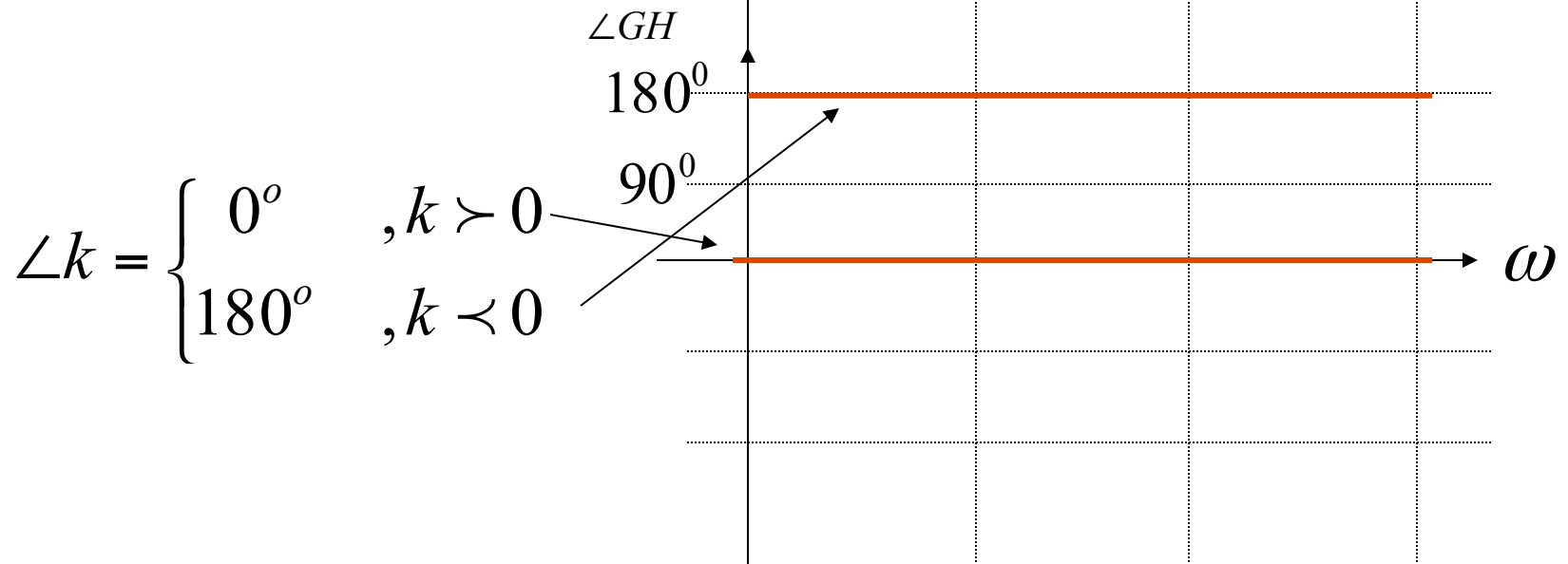
Simple Pole: $\frac{1}{1 + j\omega\tau}$	 $\omega_c = \frac{1}{\tau}$	 $\omega_c = \frac{1}{\tau}$ -90
Simple Zero: $1 + j\omega\tau$		 +90
DC Zero: $j\omega\tau$		 +90
DC Pole: $\frac{1}{j\omega\tau}$	 Alla lutningar 20dB/dek	 -90

Case I:

k



$$|k|_{dB} = 20 \log |k| (dB)$$



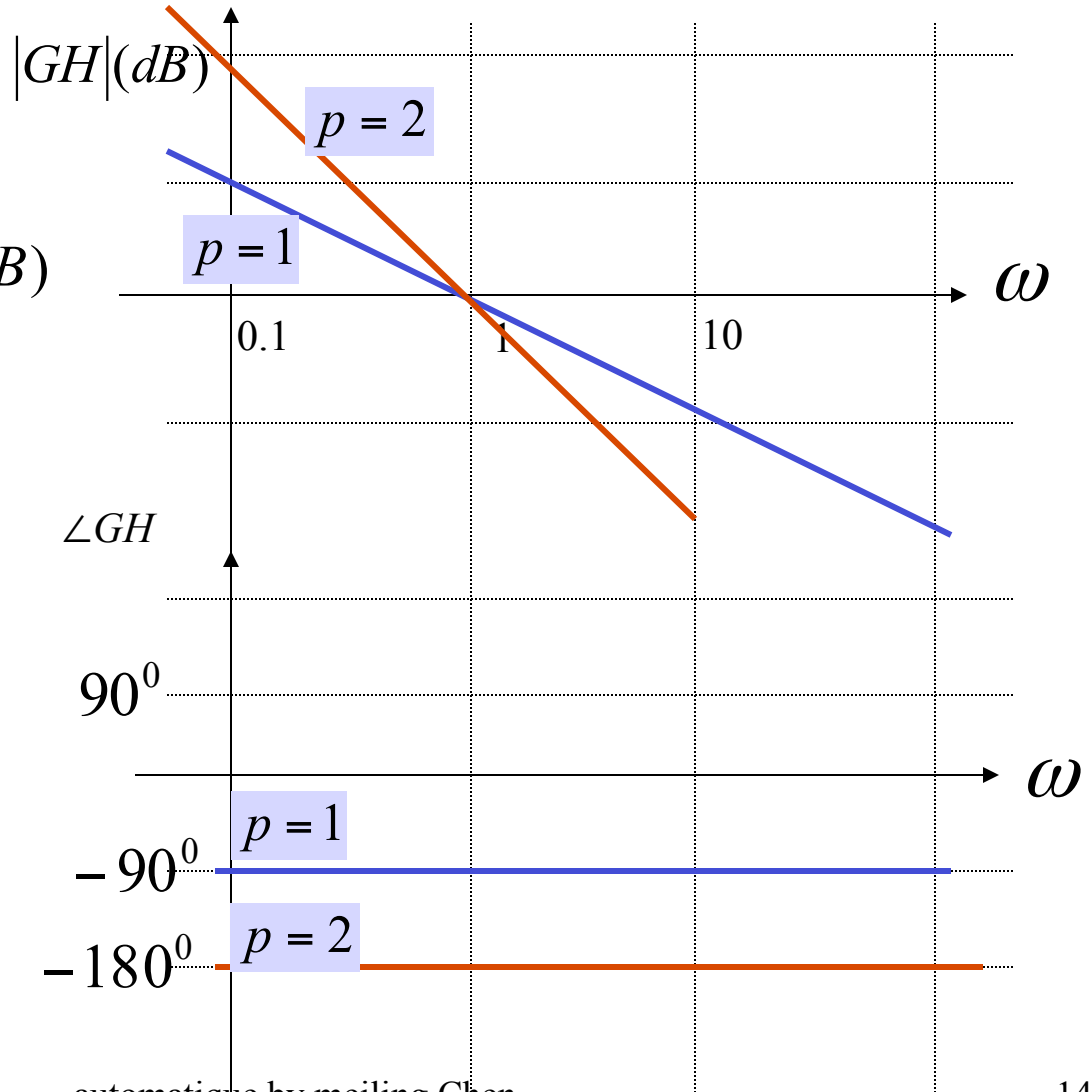
$$\angle k = \begin{cases} 0^\circ & , k \succ 0 \\ 180^\circ & , k \prec 0 \end{cases}$$

Case II :

$$\frac{1}{s^p}$$

$$\left| \frac{1}{(j\omega)^p} \right|_{dB} = -20p \log \omega (dB)$$

$$\angle \frac{1}{(j\omega)^p} = (-90^\circ) \times p$$

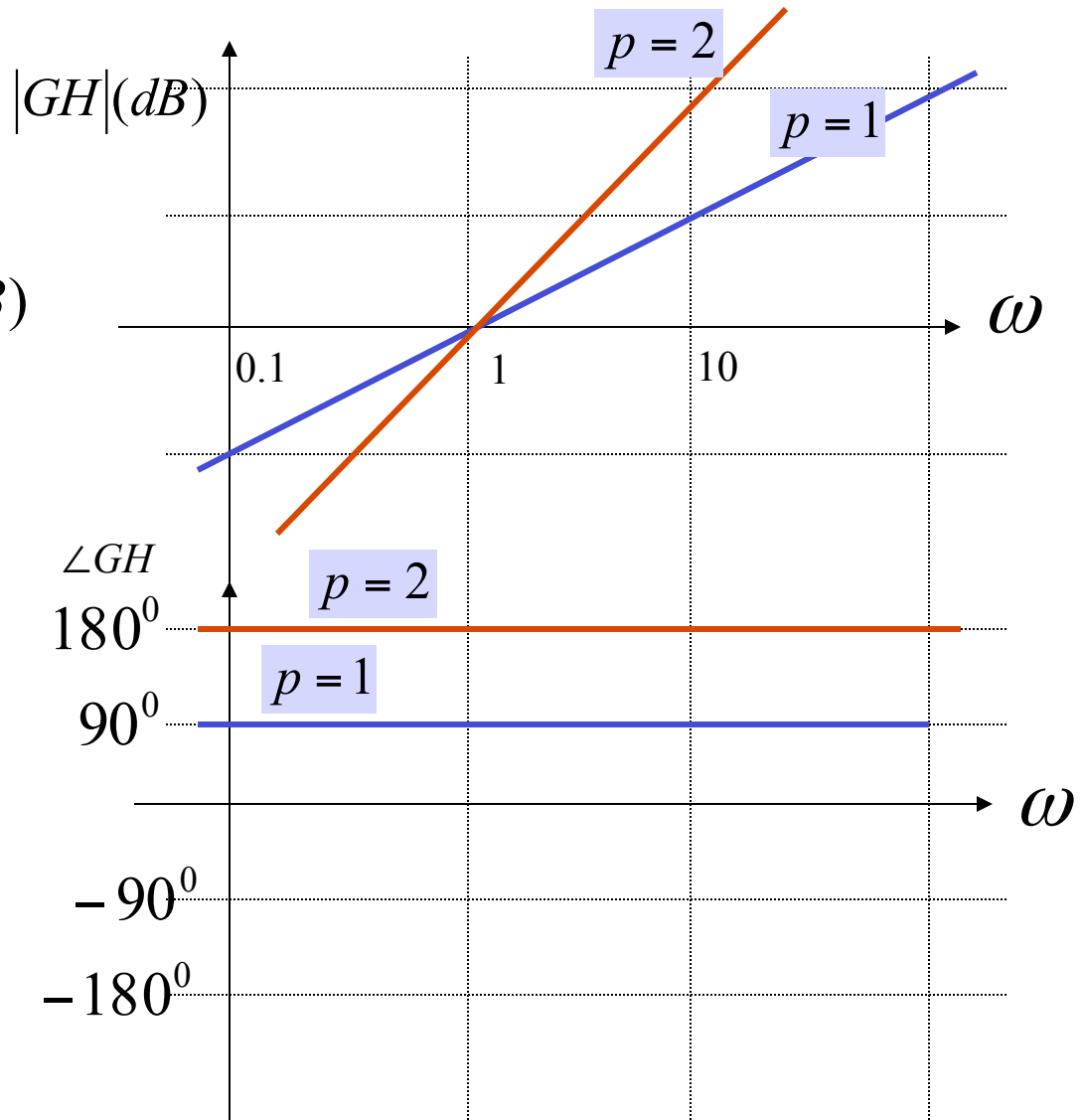


Case III :

s^p

$$|(j\omega)^p|_{dB} = 20p \log \omega (dB)$$

$$\angle(j\omega)^p = (90^\circ) \times p$$



Case IV:

$$\frac{a}{(j\omega + a)} \quad \text{or} \quad \left(\frac{1}{a}j\omega + 1\right)^{-1}$$

$$a = 1$$

$$\left| \left(1 + j\frac{\omega}{a}\right)^{-1} \right|_{dB} = -20 \log \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{a}\right)^2}$$

$$= -10 \log \left[1 + \left(\frac{\omega}{a}\right)^2 \right]$$

$$\omega \ll a \Rightarrow \frac{\omega}{a} \approx 0 \Rightarrow dB = -10 \log 1 = 0$$

$$\omega \gg a \Rightarrow 1 + j\frac{\omega}{a} \approx \frac{\omega}{a} \Rightarrow dB \approx -20 \log \frac{\omega}{a}$$

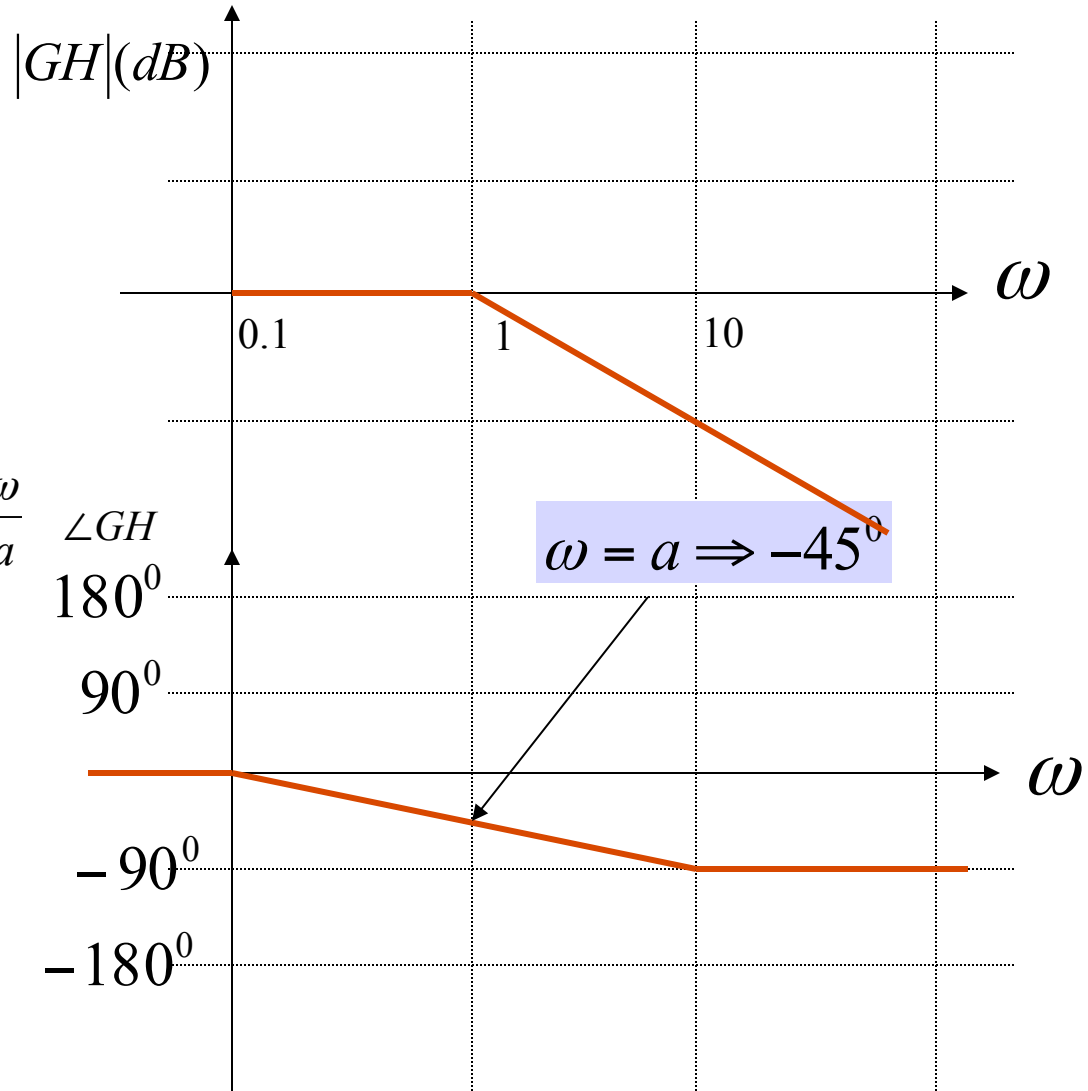
$$dB = -[20 \log \omega - 20 \log a]$$

$$\omega = a \Rightarrow 1 + j1 \Rightarrow dB = -10 \log 2 = -3.01$$

$$\angle \left(1 + j\frac{\omega}{a}\right) = 0^\circ - \tan^{-1} \frac{\omega}{a}$$

$$\omega \ll a \Rightarrow \frac{\omega}{a} \approx 0 \Rightarrow \angle GH \approx \tan^{-1} 0 = 0^\circ$$

$$\omega \gg a \Rightarrow \frac{\omega}{a} \approx \infty \Rightarrow \angle GH \approx -\tan^{-1} \infty = -90^\circ$$



Case VI:

$$\frac{(j\omega + a)}{a} \text{ or } \left(\frac{1}{a}j\omega + 1\right)$$

$$a = 1$$

$$\left|1 + j\frac{\omega}{a}\right|_{dB} = 20 \log \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{a}\right)^2}$$

$$= 10 \log \left[1 + \left(\frac{\omega}{a}\right)^2\right]$$

$$\omega \ll a \Rightarrow \frac{\omega}{a} \approx 0 \Rightarrow dB = 10 \log 1 = 0$$

$$\omega \gg a \Rightarrow 1 + j\frac{\omega}{a} \approx \frac{\omega}{a} \Rightarrow dB \approx 20 \log \frac{\omega}{a}$$

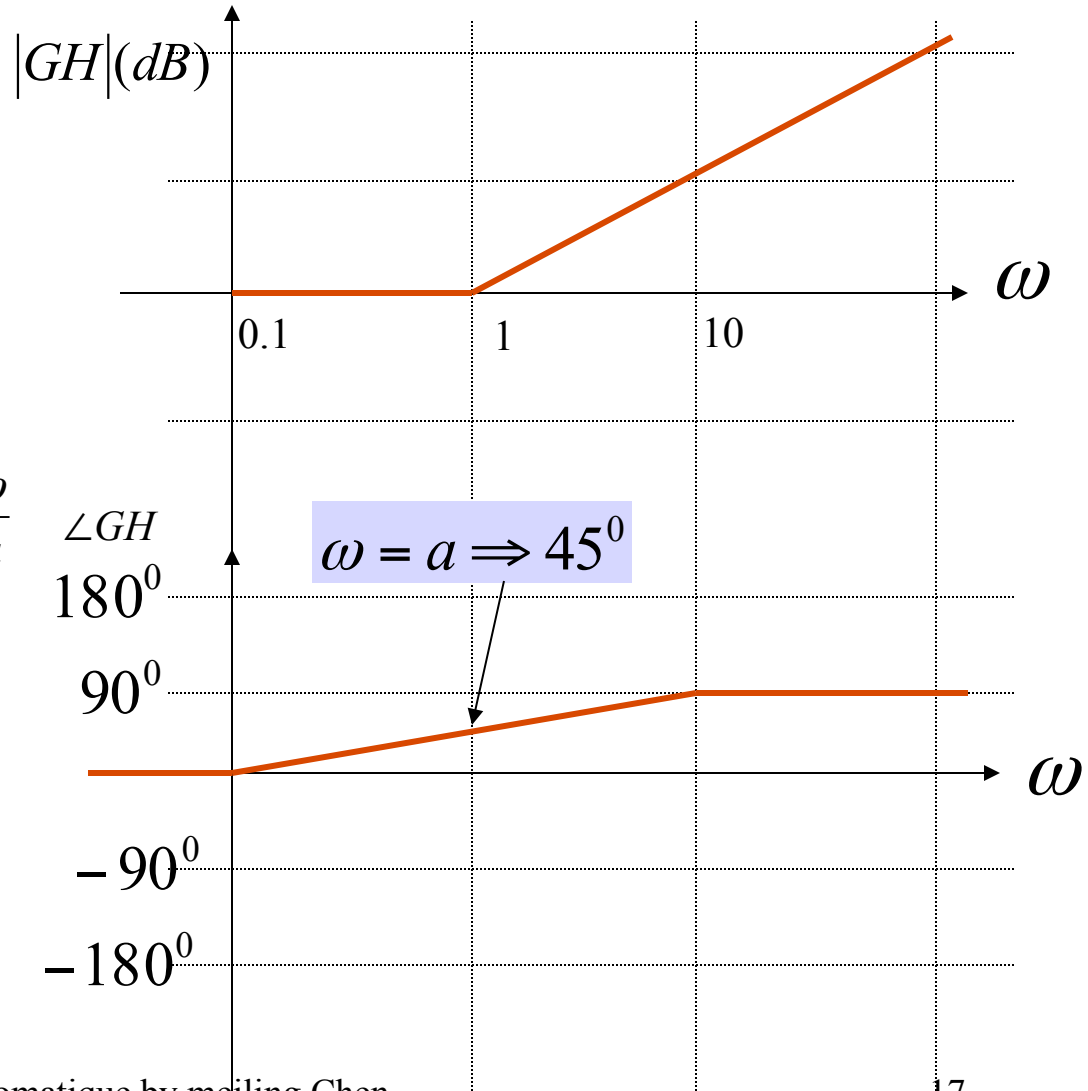
$$dB = 20 \log \omega - 20 \log a$$

$$\omega = a \Rightarrow 1 + j1 \Rightarrow dB = 10 \log 2 = 3.01$$

$$\angle\left(1 + j\frac{\omega}{a}\right) = \tan^{-1} \frac{\omega}{a}$$

$$\omega \ll a \Rightarrow \frac{\omega}{a} \approx 0 \Rightarrow \angle GH \approx \tan^{-1} 0 = 0^\circ$$

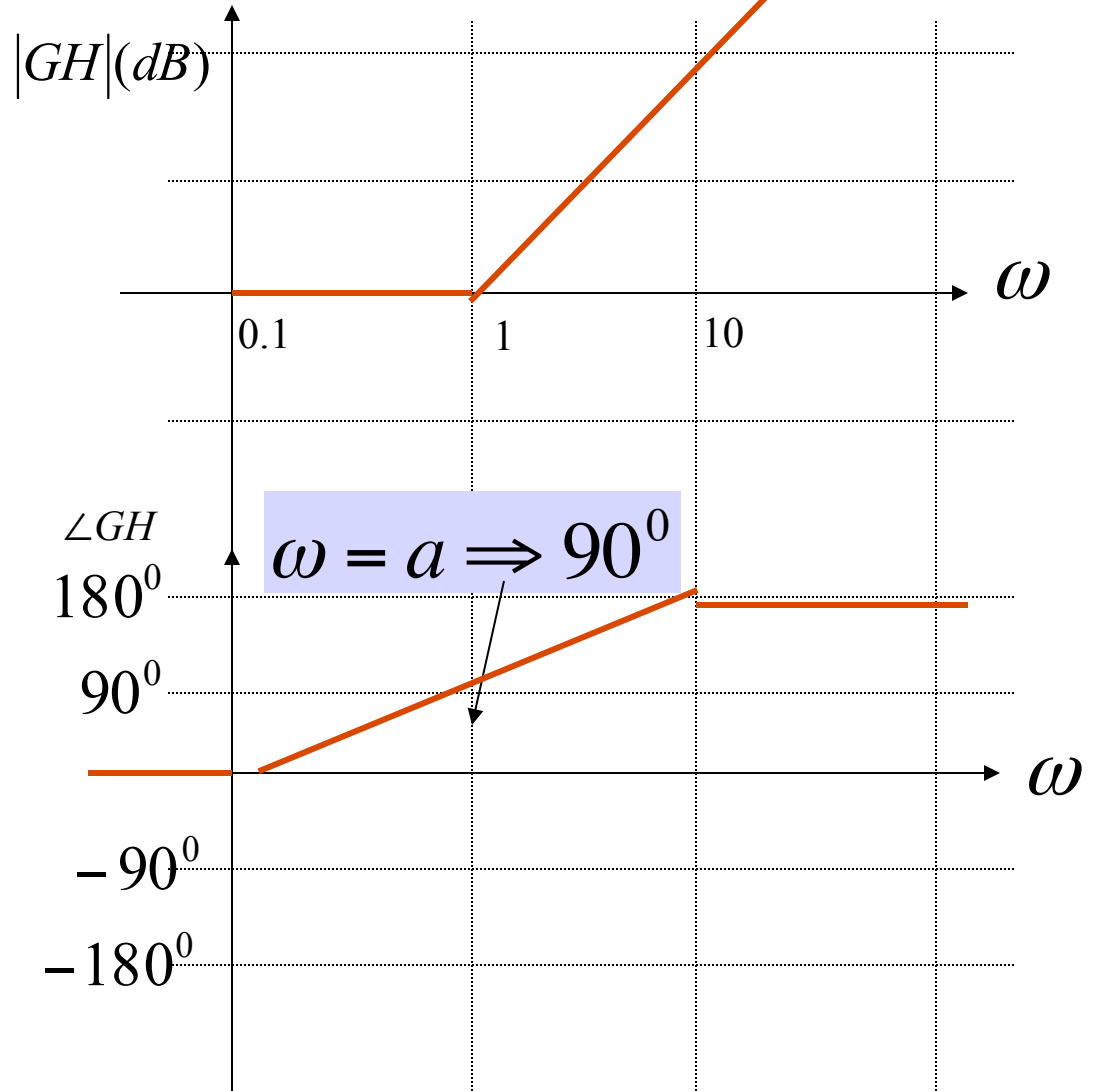
$$\omega \gg a \Rightarrow \frac{\omega}{a} \approx \infty \Rightarrow \angle GH \approx \tan^{-1} \infty = 90^\circ$$



Case V :

$$\left(\left(\frac{\omega}{a}\right)^2 + j\frac{\omega}{a} + 1\right)$$

$$a = 1$$



Exempel

Consider the following transfer function

$$H(j\omega) = \frac{10^{-5} j\omega(1 + j\omega\tau_2)}{(1 + j\omega\tau_1)(1 + j\omega\tau_3)}$$

$\tau_1 = 100\text{ ns}$
 $\tau_2 = 10\text{ ns}$
 $\tau_3 = 100\text{ ps}$

Brytfrekvenser: inverterad tidskonstanter

$$\omega_1 = 10\text{ Mrad/s}$$

$$\omega_2 = 100\text{ Mrad/s}$$

$$\omega_3 = 10\text{ Grad/s}$$

$$H(j\omega) = \frac{\frac{j\omega}{10^5} (1 + j\frac{\omega}{\omega_2})}{(1 + j\frac{\omega}{\omega_1})(1 + j\frac{\omega}{\omega_3})}$$

Exempel

Bryta ner amplituder

$$\begin{aligned} |H(j\omega)|_{\text{dB}} &= 20 \log \left| \frac{\frac{j\omega}{10^5} (1 + j \frac{\omega}{\omega_2})}{(1 + j \frac{\omega}{\omega_1})(1 + j \frac{\omega}{\omega_3})} \right| \\ &= 20 \log \left| \frac{j\omega}{10^5} \right| + 20 \log \left| 1 + j \frac{\omega}{\omega_2} \right| \\ &\quad - 20 \log \left| 1 + j \frac{\omega}{\omega_1} \right| - 20 \log \left| 1 + j \frac{\omega}{\omega_3} \right| \end{aligned}$$

Kom ihåg: log av produkt är summa av logs

Exempel

Bryta ner fas

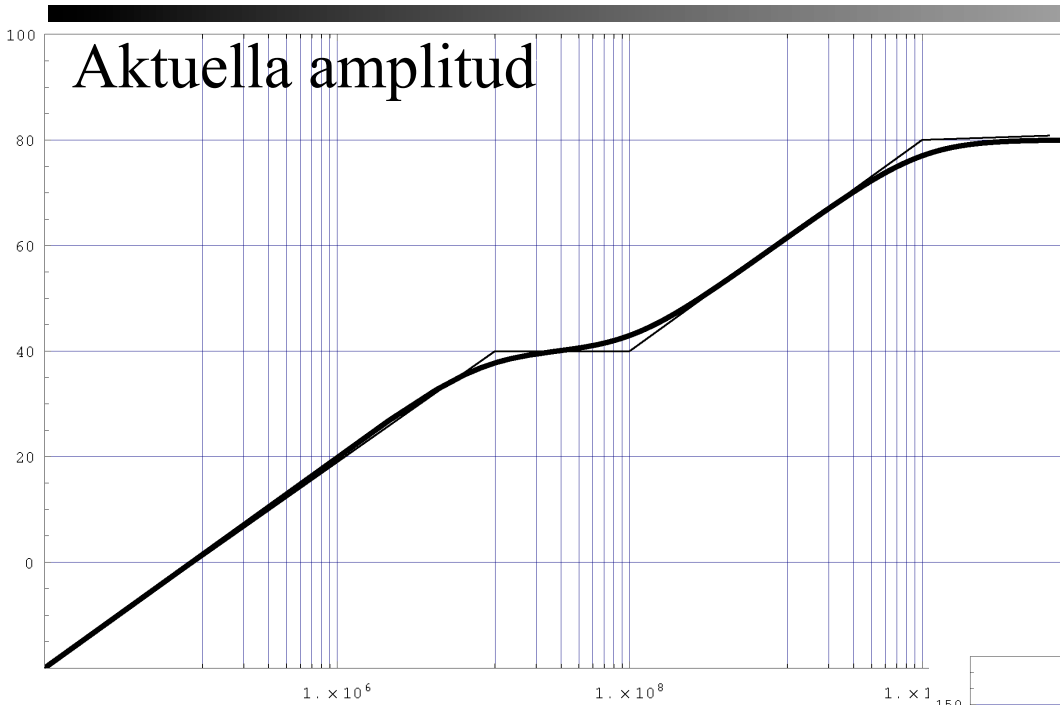
$$\angle a \cdot b = \angle a + \angle b$$

$$\angle H(j\omega) = \angle \frac{10^{-5} j\omega(1 + j\omega\tau_2)}{(1 + j\omega\tau_1)(1 + j\omega\tau_3)}$$

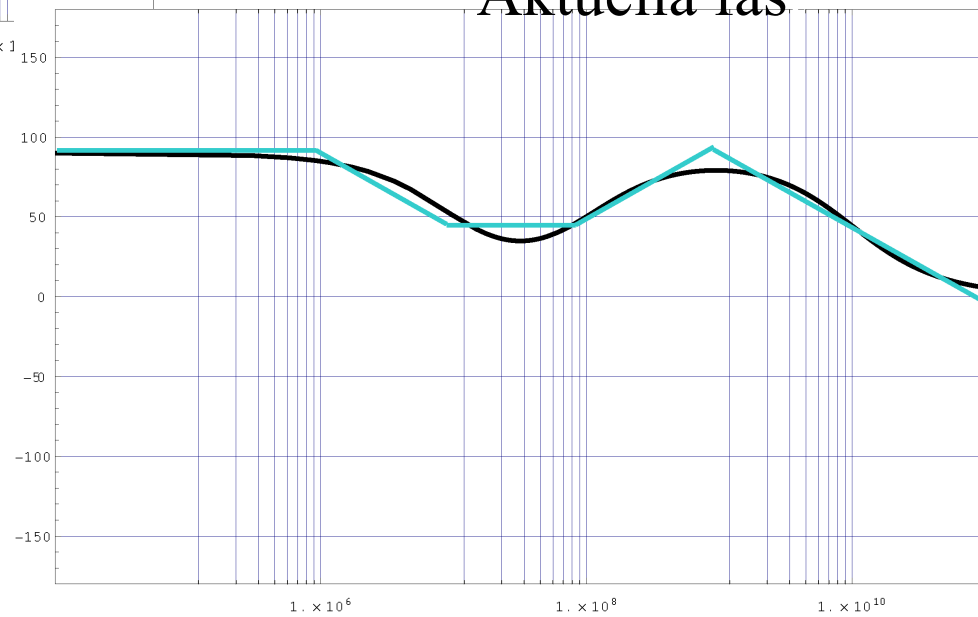
$$\angle H(j\omega) = \angle \frac{j\omega}{10^5} + \angle 1 + j \frac{\omega}{\omega_2}$$

$$- \angle 1 + j \frac{\omega}{\omega_1} - \angle 1 + j \frac{\omega}{\omega_3}$$

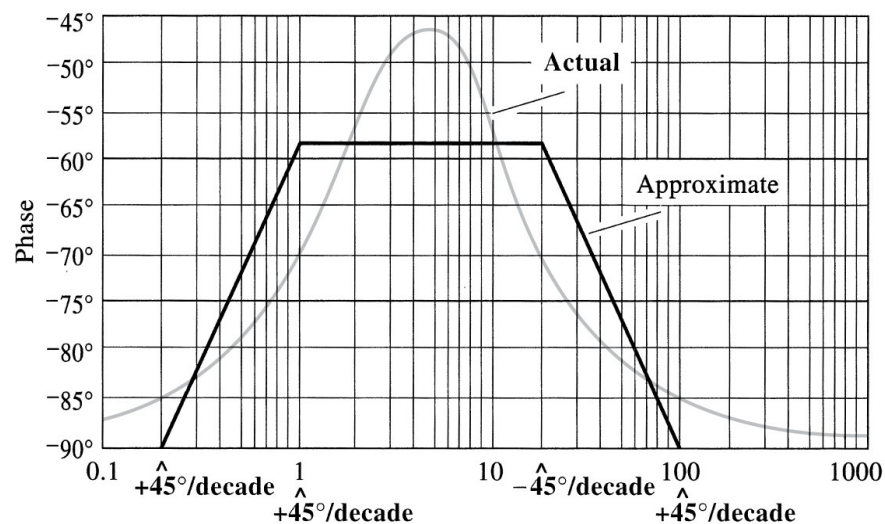
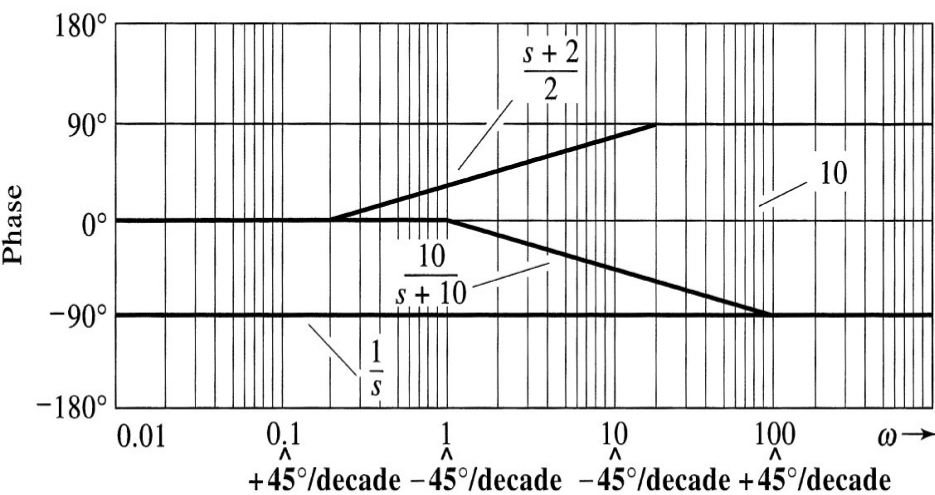
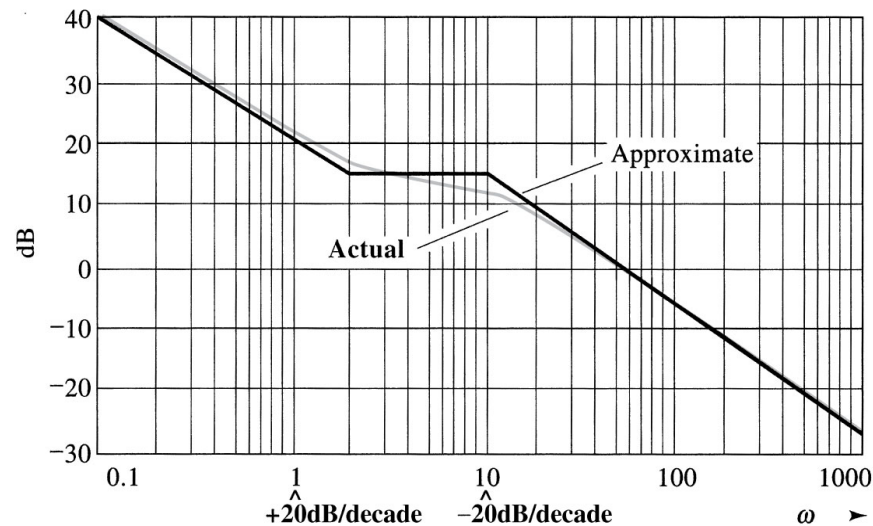
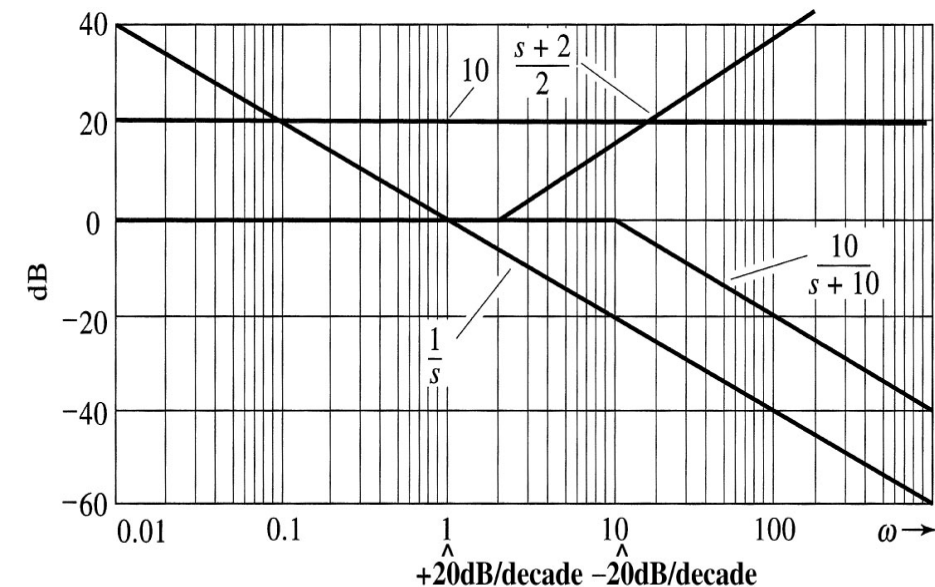
Aktuella amplitud



Aktuella fas

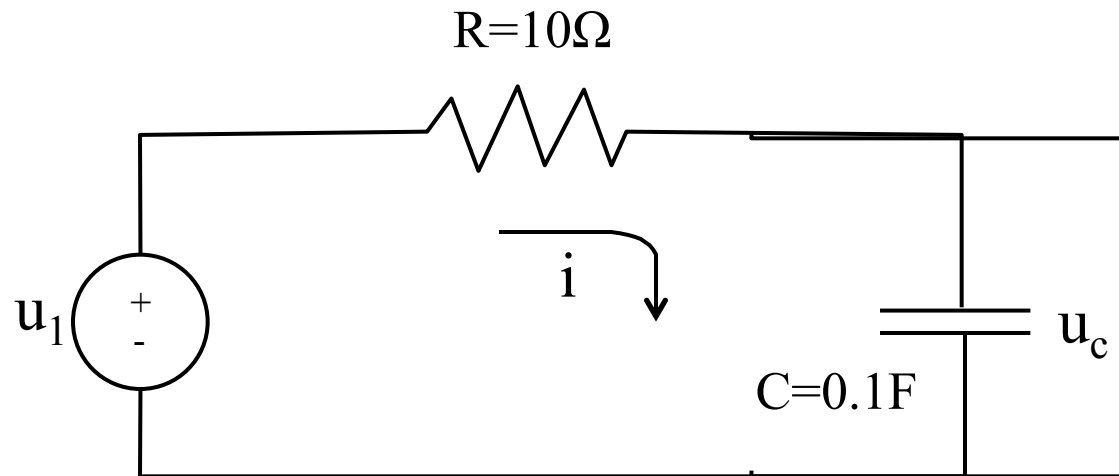


Hur bra approximation man får?

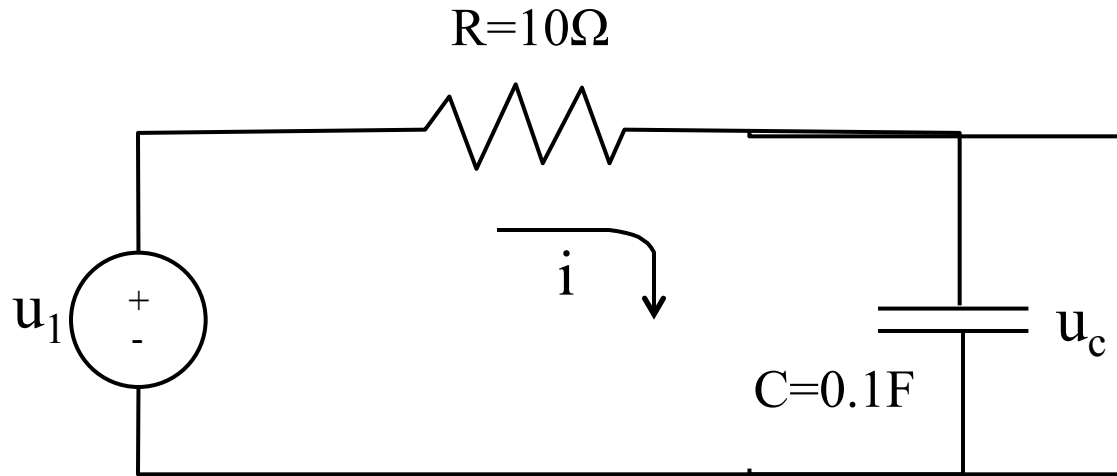


Exempel

Bestäm $H(j\omega)$ av följande krets. Rita Bodediagramet.



Exempel

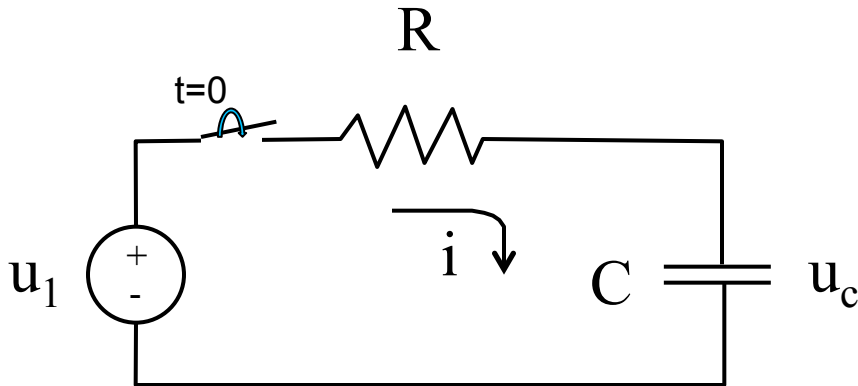


$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega}$$

Är det något som $H(j\omega)$ inte beskriver?

Motivering

Transienter!



Differential ekvation

$$i(t) = \frac{u_1(t) - u_c(t)}{R}$$

$$i(t) = C \frac{du_c(t)}{dt}$$

$$\frac{du_c(t)}{dt} + \frac{1}{RC} u_c(t) = \frac{1}{RC} u_1(t)$$

Laplaceformen

Histori av Laplace transform

Euler began looking at integrals as solutions to differential equations in the mid 1700's:

$$z = \int X(x) e^{ax} dx \qquad z(x; a) = \int_0^x e^{at} X(t) dt,$$

Lagrange took this a step further while working on probability density functions and looked at forms of the following equation:

$$\int X(x) e^{-ax} a^x dx,$$

Finally, in 1785, **Laplace** began using a transformation to solve equations of finite differences which eventually lead to the current transform

$$S = Ay_s + B \Delta y_s + C \Delta^2 y_s + \dots, \qquad y_s = \int e^{-sx} \phi(x) dx,$$

Pierre-Simon Laplace

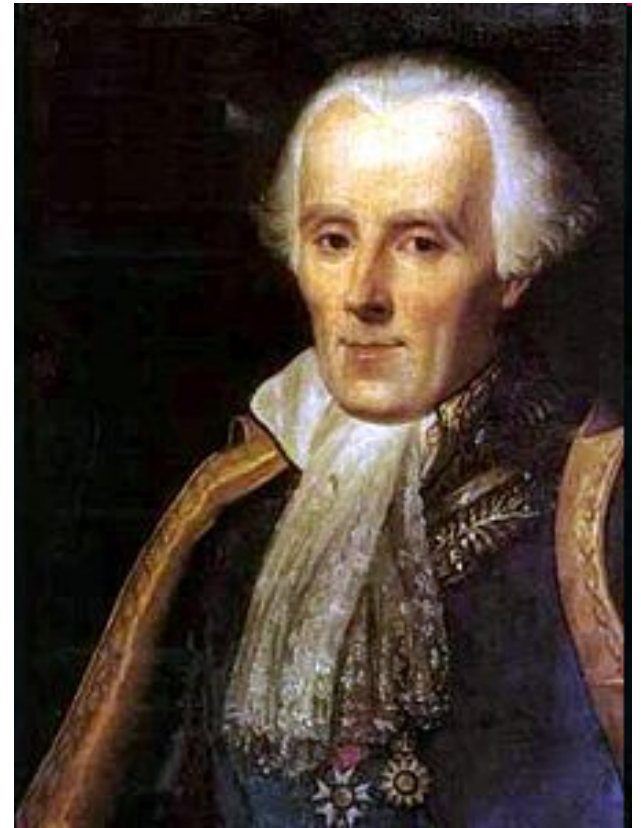
“The French Newton”

Developed mathematics in
astronomy, physics, and statistics

Began work in calculus which led to
the Laplace Transform

Focused later on celestial mechanics

One of the first scientists to suggest
the existence of black holes



Definition

The Laplace transform is a linear operator that switched a function $x(t)$ to $X(s)$.

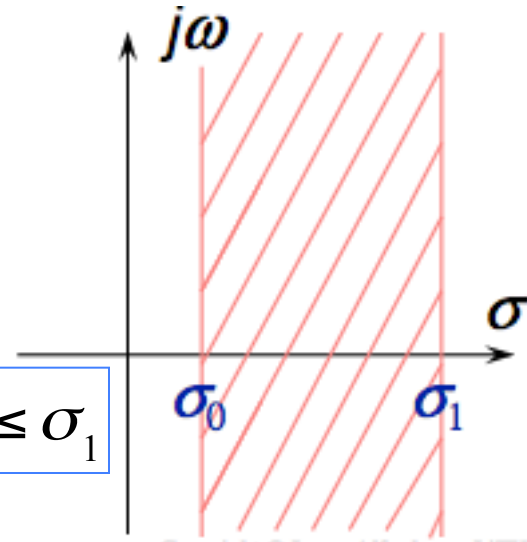
$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st} dt$$

*Laplace transform
(dubbelsidigt)*

$$s = \sigma + j\omega \quad [\text{s}^{-1}]$$

Men vi ska använda
en enkelsidigt variant

$$\sigma_0 < \sigma = \text{Re}\{s\} \leq \sigma_1$$



Jämför med Fourier transform

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt$$

Definition

Laplace transform
(enkelsidigt)

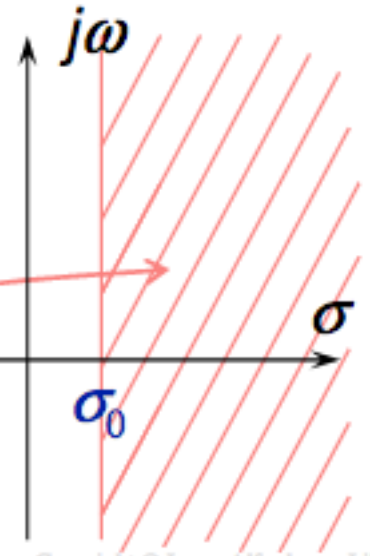
$$F(s) = \int_{0^-}^{\infty} x(t) e^{-st} dt$$

Att ha med
impulser i $t=0$

$$s = \sigma + j\omega$$

Konvergensområde

$$\sigma = \operatorname{Re}\{s\} > \sigma_0$$



- + Enklare att få svar på transienter
- + konsistent med vanlig praktik
- Bortser $x(t)$ för $t < 0$

Ett par

$$x(t) \xleftrightarrow{L} X(s)$$

$$\begin{aligned} x(t) u(t) &\xleftrightarrow{\mathcal{L}} X(s) \\ X(s) &= \mathcal{L}\{x(t)\} \\ x(t) u(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(0^+) &= \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) \\ f(0^-) &= \lim_{t \rightarrow 0^-} f(t) \end{aligned}$$

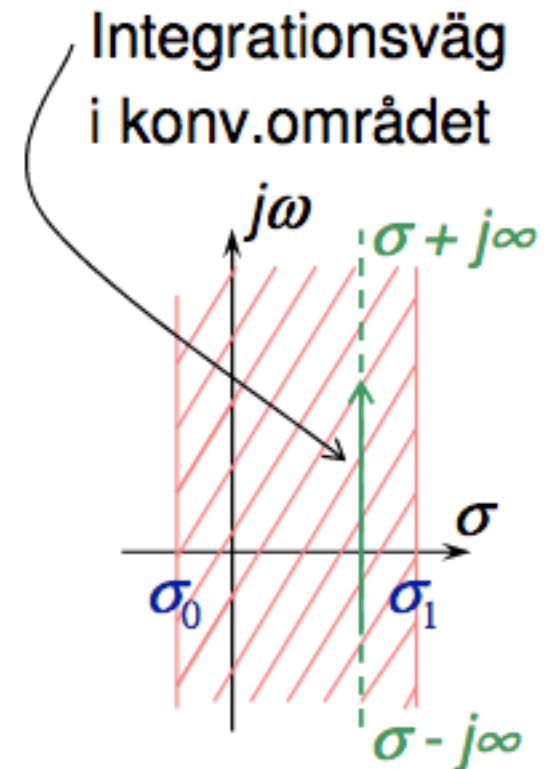
Definition

Den inversa laplacetransformen är densamma för den dubbelsidiga som för den enkelsidiga transformen:

Invers Laplace transform

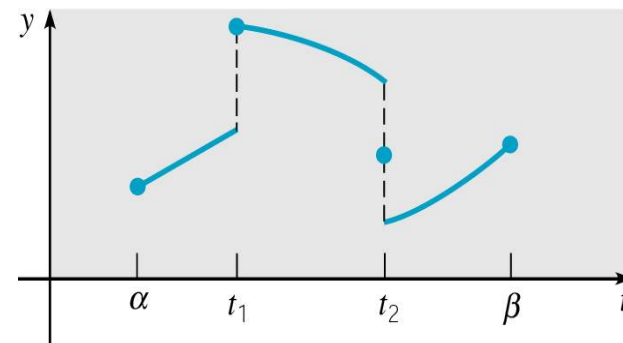
$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} X(s) e^{st} ds$$

Dock denna används typisk inte
Vi kommer använda partialbröksuppdelning



Begränsking

- 1) En funktion $f(t)$ är styckvis kontinuerlig på $[a; b]$ om den är kontinuerlig utom i ett ändligt antal punkter i intervallet, men har (ändliga) höger- och vänstergränsvärden i dessa punkter.



- 2) är integrerbar på $0 \leq t \leq R$ för alla $R > 0$ och om $f(t)$ har exponentiell ordning (då $t \rightarrow \infty$)

dvs om det finns konstanter C, a, t_0 sådana att

$$|f(t)| \leq Me^{at}, \quad t \geq t_0$$

Ingen LT

$$f(t) = e^{at^2}$$

Konvergens och ROC

- Laplacetransformen inte alltid konvergerar till en ändlig värde för alla signaler och alla värden av s
- Värdena för er som Laplace trans konvergerar kallas regionen konvergens (ROC)

Exempel

$$f(t) = e^{-at}u(t);$$

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

$$= \int_{0^+}^{\infty} e^{-at} e^{-st} dt = \frac{1}{-s-a} e^{(-s-a)t} \Big|_{0^+}^{\infty}$$

$$= \frac{-1}{s+a} e^{-(s+a)t} \Big|_{0^+}^{\infty} = \frac{1}{s+a} \Rightarrow \operatorname{Re}(s+a) > 0; \operatorname{Re}(s) > -a$$

Inkludera alltid ROC i din lösning!

Konvergens och ROC

ROC existerar inte nödvändigt

$$f(t) = e^{2t}u(t) + e^{-3t}u(-t)$$

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

$$e^{2t}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s-2}; \text{Re}(s) > 2$$

$$e^{-3t}u(-t) \leftrightarrow -\frac{1}{s+3}; \text{Re}(s) < -3$$

~~$$F(s) = \frac{1}{s-2} - \frac{1}{s+3};$$~~

Det finns ingen gemensam ROC $\rightarrow$ Laplace Transform
can inte appliceras!

LT: Egenskaper

Linjäritet

$$\begin{aligned} X_1(s) &= \mathcal{L}\{x_1(t)\} & \text{ROC} &= R_1 \\ X_2(s) &= \mathcal{L}\{x_2(t)\} & \text{ROC} &= R_2 \end{aligned}$$

then you should be able to show that

$$\boxed{[a_1x_1(t) + a_2x_2(t)] u(t) \xLeftrightarrow{\mathcal{L}} a_1X_1(s) + a_2X_2(s)} \quad \text{ROC} = R_1 \cap R_2$$

Example: Find the Laplace transform of $x(t) = 5\delta(t) - 2\cos 5t$.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\delta(t)\} &= 1 \\ \mathcal{L}\{\cos \omega t\} &= \frac{s}{s^2 + \omega^2} \\ \mathcal{L}\{5\delta(t) - 2\cos 5t\} &= 5(1) - 2\left(\frac{s}{s^2 + 5^2}\right) \\ &= 5 - \frac{2s}{s^2 + 25} \end{aligned}$$

LT: Egenskaper

TidSkalning

Given $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$, what is $\mathcal{L}\{x(at)\}$ for $a > 0$?

$$\mathcal{L}\{x(at)\} = \int_{0^-}^{\infty} x(at)e^{-st} dt$$

$$\tau = at$$

$$d\tau = a dt$$

$$t = \frac{\tau}{a}$$

$$dt = \frac{1}{a} d\tau$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{x(at)\} &= \frac{1}{a} \int_{0^-}^{\infty} x(\tau)e^{-s\frac{\tau}{a}} d\tau \\ &= \frac{1}{a} \int_{0^-}^{\infty} x(\tau)e^{-\left(\frac{s}{a}\right)\tau} d\tau\end{aligned}$$

$$x(at) u(t) \xLeftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{a} X\left(\frac{s}{a}\right)$$

LT: Egenskaper

Tidtranslation

Given $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$, what is $\mathcal{L}\{x(t - t_0)u(t - t_0)\}$ for $t_0 > 0$?

$$\mathcal{L}\{x(t - t_0)u(t - t_0)\} = \int_{0-}^{\infty} x(t - t_0)u(t - t_0)e^{-st} dt$$

$$\tau = t - t_0$$

$$d\tau = dt$$

$$t = \tau + t_0$$

$$\mathcal{L}\{x(t - t_0)u(t - t_0)\} = \int_{-t_0}^{\infty} x(\tau)u(\tau)e^{-s(\tau+t_0)} d\tau$$

$$= \int_{0-}^{\infty} x(\tau)u(\tau)e^{-s(\tau+t_0)} d\tau$$

$$= e^{-st_0} \int_{0-}^{\infty} x(\tau)e^{-s\tau} d\tau$$

$$x(t - t_0)u(t - t_0) \xLeftrightarrow{\mathcal{L}} e^{-st_0}X(s)$$

LT: Egenskaper

OBS: kombinerer av Tidtranslation och tidskalning

$$f(at - b)u(at - b) \leftrightarrow \frac{e^{-sb/a}}{a} F(s/a)$$

Först Tidsförskjutning sedan skalning!!!

LT: Egenskaper

Förskjutning i s-domän

Given $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$, what is the inverse Laplace transform of $X(s + s_0)$?

$$\begin{aligned} X(s + s_0) &= \int_{0^-}^{\infty} x(t) e^{-(s+s_0)t} dt \\ &= \int_{0^-}^{\infty} (x(t) e^{-s_0 t}) e^{-st} dt \\ &= \mathcal{L}\{e^{-s_0 t} x(t)\} \\ \mathcal{L}^{-1}\{X(s + s_0)\} &= e^{-s_0 t} x(t) u(t) \\ \boxed{e^{-s_0 t} x(t) u(t) \xLeftrightarrow{\mathcal{L}} X(s + s_0)} \end{aligned}$$

LT: Egenskaper

Differentiation i tiden

Given $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$, what is the Laplace transform of $\dot{x}(t)$?

$$\mathcal{L}\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\} = \int_{0^-}^{\infty} \frac{dx(t)}{dt} e^{-st} dt$$

$$u = e^{-st}$$

$$du = -se^{-st} dt$$

$$dv = \frac{dx(t)}{dt} dt$$

$$v = x(t)$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\} &= \int_{0^-}^{\infty} u dv = uv|_{0^-}^{\infty} - \int_{0^-}^{\infty} v du \\ &= e^{-st}x(t)|_{0^-}^{\infty} - \int_{0^-}^{\infty} x(t) (-se^{-st}) dt \\ &= (0 - x(0^-)) + s \int_{0^-}^{\infty} x(t) e^{-st} dt\end{aligned}$$

$$\frac{dx(t)}{dt} u(t) \xLeftrightarrow{\mathcal{L}} sX(s) - x(0^-)$$

Mot lösningen differential ekvationer...

$$\frac{d}{dt} \xleftrightarrow{\mathcal{L}} s$$

$$L\left[\frac{d}{dt}y(t)\right] = sY(s) - y(0)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} \xleftrightarrow{L} s^2$$

$$L\left[\frac{d^2}{dt^2}y(t)\right] = s^2F(s) - sf(0^-) - \frac{df(0^-)}{dt}$$

$$\frac{d^n}{dt^n} \xleftrightarrow{\mathcal{L}} s^n$$