

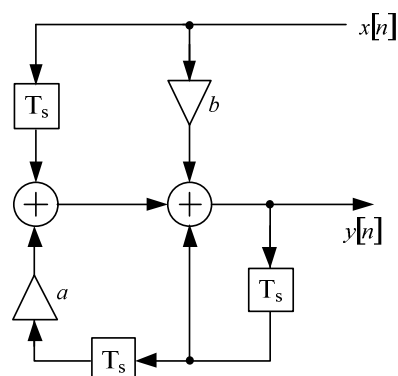
TENTAMEN

KURSNAMN	Linjära system
PROGRAM: namn åk / läsperiod	Mekatronik-, elektro- och dataingenjör 120p Åk 2 / Lp 1
KURSBETECKNING	SSY 020 0205
EXAMINATOR	Bill Karlström
TID FÖR TENTAMEN	Måndag 26 augusti 2013 kl 14.00 – 18.00
HJÄLPMEDEL	Typgodkänd räknare.
ANSV LÄRARE: namn telnr besöker tentamen kl	Bill Karlström 0708176535 ca 15.30
DATUM FÖR ANSLAG av resultat samt av tid och plats för granskning	Lösningar och resultat med kod anges på kursens senaste hemsida senast 30 augusti kl. 15. Granskning kan ske i mitt rum 2 september kl 12 - 13 Ev. ändringar anslås på senaste kurshemsidan.
ÖVRIG INFORM. (ex.vis antal frågor, uppgifter, poäng o dyl)	Denna tentamen utgör ett komplement till övrig examination i kursen. För att få godkänt krävs 18p. För att få full poäng på en uppgift ska beräkningar redovisas så att det är lätt att följa dem.

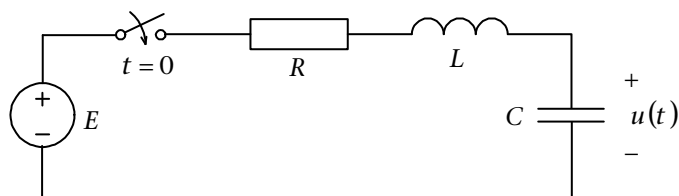
**Lösningarna skall vara fullständigt redovisade så att dina resonemang går att följa!
Använda samband skall redovisas!**

1. a. Den tidkontinuerliga funktionen $x(t) = 12e^{-12000t} \cdot \cos 2400\pi t$ samplas från $t = 0$ med frekvensen 25kHz.
Den diskreta signal som erhålles kan skrivas $x[n] = A \cdot b^n \cdot \sin[n \cdot \Omega]$.
Bestäm A , b och Ω . 1p
- b. Bestäm z-transformen $X(z)$ för funktionen $x[n] = \frac{(2 - 0,8^n)}{2^n}$. 2p
- c. Bestäm signalen $x(t)$ då dess Laplacetransform-transform är $X(s) = \frac{2}{2s+1} - \frac{2}{s}$. 1p
2. a. Ett tidkontinuerligt system har överföringsfunktionen $H(s) = \frac{s+10}{(s+3)(2s^2+8s+3a)}$.
Är systemet stabilt för då $a = -8$? Svaret skall motiveras! 2p
- b. Ett diskret system har överföringsfunktionen $H(z) = \frac{z+1,5 \cdot b}{z^2+0,8z+b}$.
Bestäm systemets impulssvar då $b = 0,8$. 3p
3. Ett diskret system med överföringsfunktionen $H(z) = A \cdot \frac{z+B}{z+C}$ har stegsvaret $y[n] = 1 + (-0,8)^n$.
Bestäm A , B och C . 3p

4. Bestäm övrföringsfunktionen $H(z)$ för systemet t.h.
Uttrycket skall vara förenklat så att det innehåller endast positiva z-potenser!
2p

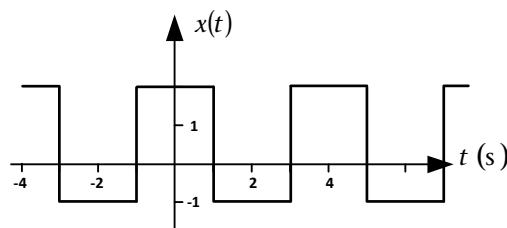


5. I kretsen t.h. är kondensatorn urladdad vid tiden $t = 0$.
a. Bestäm spänningen $u(t)$ över kondensatorn för $t \geq 0$. 3p
 $L = 1\text{mH}$ $C = 2\text{nF}$ $R = 1\text{k}\Omega$ $E = 20\text{V}$
- b. Antag att L och C är oförändrade men att R kan väljas fritt. För vilka R blir $u(t)$ en icke-svängande funktion?
3p



- 6 a. Den periodiska signalen $x(t)$ i diagrammet t.h. kan approximeras med en del av sin komplexa Fourierserie enligt

$$x(t) = c_0 + \sum_{\substack{k=-2 \\ k \neq 0}}^2 c_k \cdot e^{jk\omega_0 t}$$



Beräkna ω_0 samt koefficienterna c_k , $k = -2, -1, 0, 1, 2$ i denna summa.

Svara med färdigräknade värden!!

5p

- b. Signalen $x(t)$ nedan skall samplas. Med vilken lägsta frekvens skall detta göras för att signalen skall kunna återskapas ur sina sampel?

2p

$$x(t) = 6,7 \sin(12800t + 135^\circ) - 2,8 \cos(8990\pi t - 53^\circ) + 8,4 \sin(4,5 \cdot 10^4 t + 61^\circ)$$

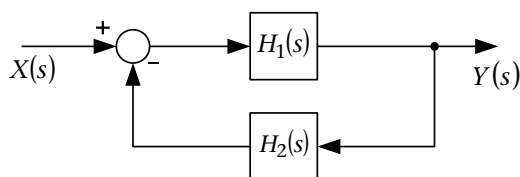
7. Figuren visar blockschemat för ett system där $H_1(s) = \frac{3}{s+1}$ och $H_2(s) = \frac{b}{s+2}$.

- a. För vilka värden på b är systemet stabilt med ett icke-svängande stegsvar?
- b. Finns det något värde på b som får systemets stegsvar att ha

5p

formen $y(t) = A + B \cdot e^{-2,5t} + C \cdot e^{-0,5t}$?

2p



8. $H(z) = \frac{z^2 + az + b}{z^2 + 0,95az + 0,9025b}$ är överföringsfunktionen för ett notchfilter med samplingsfrekvensen 800Hz. Bestäm a och b så att filtret släcker ut frekvensen 150Hz.

6p

9. Bestäm Fouriertransformen $U(\omega)$ för $u(t) = 5 \cdot e^{-10|t|}$

5p

Formelsamling Linjära system

Fouriertransformen

Funktionen $f(t)$ är reellvärd och periodisk med perioden T och därmed grundvinkelfrekvensen ω_0 som ges av $\omega_0 T = 2\pi$

Analoga signaler

PERIODISKA EFFEKTSIGNALER

KOMPLEX FOURIERSERIE

En periodisk signal $f(t)$ med perioden T kan skrivas

$$f(t) = c_0 + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t} \quad \text{där} \quad c_0 = \frac{1}{T} \cdot \int_{1 \text{ period}} f(t) dt, \quad c_k = \frac{1}{T} \cdot \int_{1 \text{ period}} f(t) \cdot e^{-jk\omega_0 t} dt \quad k \neq 0$$

$$\text{och } \omega_0 = \frac{2\pi}{T}.$$

REELL FOURIERSERIE

En periodisk signal $f(t)$ med perioden T kan skrivas

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega_0 t + b_k \sin k\omega_0 t), \quad \text{där } \omega_0 = \frac{2\pi}{T}.$$

KOEFFICIENTSAMBAND:

$$a_0 = c_0 \quad 2c_k = a_k - jb_k \quad \text{så att} \quad a_k = 2\operatorname{Re} c_k \quad b_k = -2\operatorname{Im} c_k \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

ENERGISIGNALER

Funktionen $f(t)$ är reellvärd och absolut integrerbar:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad \text{där} \quad F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

Parsevals formel:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega$$

Diskreta signaler

$\{x[n]\}$ är en tidsdiskret funktion (signal) som uppstår när $x(t)$ samplas med frekvensen f_s .

De diskreta tidpunkterna ges av $t = n \cdot T_s$

Den normerade vinkelfrekvensen ges av $\Omega = 2\pi \frac{f}{f_s} = \omega T_s$, där f och ω är frekvens resp. vinkelfrekvens hos $x(t)$.

Energisignal:
$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\Omega n} \quad x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_a^{a+2\pi} X(\Omega) e^{j\Omega n} d\Omega$$

Periodisk effektsignal:

$x[n]$ är en periodisk effektsignal samplad N gånger per period, så att $T = N \cdot T_s$, där T är periodtiden hos den signal $x(t)$ som samplas.

Fourierkoefficienterna ges av
$$c_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-jk\Omega_0 n}, \text{ där } \Omega_0 = \frac{2\pi}{N} \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

Fourierserien ges av
$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{jk\Omega_0 n}, \text{ där } \Omega_0 = \frac{2\pi}{N}.$$

N = signalens period (antal sampel per period)

Diskret fouriertransform , DFT

Den diskreta Fouriertransformen $Y[k]$ för en signal $y[n]$ definieras som

$$Y[k] = \sum_{n=0}^{N-1} y[n] \cdot W_N^{kn}, \text{ där } W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}} \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

Signalen $y[n]$ kan återvinnas ur sin DFT $Y[k]$ enligt

$$y[n] = \frac{1}{N} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} Y[k] \cdot W_N^{-kn}, \text{ där } W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}} \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

Laplacetransformen

Definition: $F(s) = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-st} dt$

Tidsfunktion	Transformuttryck
$\delta(t)$	1
$\sigma(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$	$\frac{1}{s}$
A (konstant)	$\frac{A}{s}$
$r(t) = t \cdot \sigma(t)$	$\frac{1}{s^2}$
$t^n, \quad n \geq 1$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{s + \alpha}$
$e^{-\alpha t} \cdot t^n, \quad n \geq 1$	$\frac{n!}{(s + \alpha)^{n+1}}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
$f'(t)$	$s \cdot F(s) - f(0)$
$f''(t)$	$s^2 \cdot F(s) - s \cdot f(0) - f'(0)$
$\int_0^t f(\tau) d\tau$	$\frac{1}{s} \cdot F(s)$
$e^{-\alpha t} \cdot f(t)$	$F(s + \alpha)$ Dämpningssatsen
$f(t - T) \cdot \sigma(t - T)$	$e^{-sT} \cdot F(s)$ Fördröjningssatsen

INVERTERINGSSATSERNA

Vi betraktar rationella uttryck av typen $F(s) = T(s)/N(s)$, där $\text{grad}T(s) < \text{grad}N(s)$

1.

En enkelpol $s = a$ till en rationell laplacetransform $F(s) = T(s)/N(s)$ ger vid inverstransformering upphov till en term $A \cdot e^{at}$, där konstanten A kan beräknas enligt formeln

$$A = \left[\frac{T(s)}{N'(s)} \right]_{s=a} \quad \text{där} \quad N'(s) = \frac{dN(s)}{ds}$$

2.

En pol $s=a$ av multipliciteten n till en rationell laplacetransform $F(s) = T(s)/N(s)$ ger vid inverstransformering upphov till en term $f_1(t)$ i tidsuttrycket som kan beräknas enligt följande formel:

$$f_1(t) = \frac{1}{(n-1)!} \cdot \left[\frac{d^{n-1}}{ds^{n-1}} \{ (s-a)^n \cdot F(s) \cdot e^{st} \} \right]_{s=a}$$

3.

Ett komplexkonjugerat polpar $s = \alpha \pm j\omega$ av multipliciteten 1 till en rationell laplacetransform

$F(s) = T(s)/N(s)$ ger vid inverstransformering upphov till en term $A \cdot e^{\alpha t} \cdot \cos(\omega t + \varphi)$, där de reella konstanterna A och φ kan bestämmas med hjälp av följande samband:

$$Ae^{j\varphi} = 2 \cdot \left[\frac{T(s)}{N'(s)} \right]_{s=\alpha+j\omega}$$

BEGYNNELSEVÄRDESSATSEN

Om $\text{grad}T(s) < \text{grad}N(s)$ gäller $\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot F(s)$

SLUTVÄRDESSATSEN

Om alla poler till $s \cdot F(s)$ ligger i det vänstra komplexa halvplanet, gäller

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0^+} s \cdot F(s)$$

z-transformen

Definition: $X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n] \cdot z^{-n}$

$\{x[n]\}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$	$X(z)$
$\{\delta[n]\}$	1
$\{\sigma[n]\} = \{1\}$	$\frac{z}{z-1}$
$r[n] = n \cdot \sigma[n]$	$\frac{z}{(z-1)^2}$
$\{a^n\}$	$\frac{z}{z-a}$
$\{e^{cn}\}$	$\frac{z}{z-e^c}$
$\{a^n \cdot n\}$	$\frac{az}{(z-a)^2}$
$\{a^n \cdot n^2\}$	$\frac{a(z+a)z}{(z-a)^3}$
$\{\sin[n\Omega]\}$	$\frac{z \cdot \sin \Omega}{z^2 - (2 \cos \Omega) \cdot z + 1}$
$\{\cos[n\Omega]\}$	$\frac{z \cdot (z - \cos \Omega)}{z^2 - (2 \cos \Omega) \cdot z + 1}$
$\{a^n \sin[n\Omega]\}$	$\frac{z \cdot a \sin \Omega}{z^2 - (2a \cos \Omega) \cdot z + a^2}$
$\{a^n \cos[n\Omega]\}$	$\frac{z \cdot (z - a \cos \Omega)}{z^2 - (2a \cos \Omega) \cdot z + a^2}$

Dämpningssatsen:

Om $\{x[n] \cdot \sigma[n]\} \supset X(z)$ så gäller $\{a^n x[n] \cdot \sigma[n]\} \supset X\left(\frac{z}{a}\right)$

Translation framåt (Fördröjningssatsen):

Om $\{x[n] \cdot \sigma[n]\} \supset X(z)$ så gäller $\{x[n-N] \cdot \sigma[n-N]\} \supset z^{-N} \cdot X(z)$

Translation bakåt: Om $\{x[n] \cdot \sigma[n]\} \supset X(z)$ så gäller

$\{x[n+N] \cdot \sigma[n]\} \supset z^N \cdot X(z) - z^N \cdot x[0] - z^{N-1} \cdot x[1] - \dots - z^1 \cdot x[N-1]$

INVERTERINGSSATSERNA

Satserna avser bestämning av tidsfunktionen $\{x[n]\}$ svarande mot transformen

$$X(z) = z \cdot \frac{T(z)}{N(z)}$$

där $T(z)$ och $N(z)$ är polynom med reella koefficienter och där $\text{grad } T(z) < \text{grad } N(z)$.

Satserna avser vidare det fall att polerna är av multipliciteten 1.

1.

Om $z = c$ är en *enkelpol*, reell eller komplex, till transformen ovan ger denna som bidrag vid inverstransformeringen en term i den tiddiskreta funktionen $\{x[n]\}$ av formen $\{Kc^n\}$

där konstanten K kan bestämmas enligt formeln

$$K = \left[\frac{T(z)}{N'(z)} \right]_{z=c} = \frac{T(c)}{N'(c)}$$

2.

Om $z = a$ är en reell **multipelpol** med multipliciteten m kommer $x[n]$ att innehålla termen

$$x[n] = \frac{1}{(m-1)!} \left[\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left\{ (z-a)^m \frac{T(z)}{N(z)} z^n \right\} \right]_{z=a}.$$

3.

Om $z_1 = a + jb = re^{j\Omega}$ och $z_2 = a - jb = re^{-j\Omega}$ är ett *komplexkonjugerat polpar* till transformen $X(z)$ ovan ger detta polpar som bidrag vid inverstransformeringen en term i den tiddiskreta funktionen $\{x[n]\}$ av formen $\{Ar^n \cos(\Omega n + \varphi)\}$

där konstanterna A och φ kan bestämmas enligt formeln

$$Ae^{j\varphi} = 2 \cdot \left[\frac{T(z)}{N'(z)} \right]_{z=a+jb} = 2 \cdot \frac{T(a+jb)}{N'(a+jb)}$$

GRÄNSVÄRDESSATSERNA

Begynnelsevärdessatsen: $x[0] = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$

Slutvärdessatsen: Om $\lim_{n \rightarrow \infty} x[n]$ existerar,

så gäller

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x[n] = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \cdot X(z)$$

Komplettering till bokens formelsamling

Komplexa tal

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \qquad \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha \qquad \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha) \qquad \cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha)$$

$$e^{j\alpha} = \cos \alpha + j \cdot \sin \alpha \qquad e^{\pm jn\pi} = \cos(\pm n\pi) = (-1)^n$$

$$\cos \alpha = \frac{e^{j\alpha} + e^{-j\alpha}}{2} \qquad \sin \alpha = \frac{e^{j\alpha} - e^{-j\alpha}}{2j}$$

Rektangulär form: $z = x + jy$ $x = r \cdot \cos \varphi$ och $y = r \cdot \sin \varphi$

Polär form: $z = r \cdot e^{j\varphi}$ $\tan \varphi = \frac{y}{x}$ och $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

Eulers formel $e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \cdot \sin \omega t$

Speciellt: $\frac{1}{j} = -j$ $j = e^{j90^\circ}$ $\frac{1}{j} = e^{-j90^\circ}$

Polär $\rightarrow$ Rektangulär: $z = r \cdot e^{j\varphi} = a + jb$, där $a = r \cos \varphi$ $b = r \sin \varphi$

Rektangulär $\rightarrow$ Polär: $z = a + jb = |z| \cdot e^{j\varphi}$, där $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ där

$$\arg z = \varphi = \begin{cases} \varphi = \arctan \frac{b}{a} & a > 0 \quad b > 0 \quad 1: \text{a kvadranten} \\ \varphi = 180^\circ - \arctan \left| \frac{b}{a} \right| & a < 0 \quad b > 0 \quad 2: \text{a kvadranten} \\ \varphi = \arctan \left| \frac{b}{a} \right| - 180^\circ & a < 0 \quad b < 0 \quad 3: \text{e kvadranten} \\ \varphi = -\arctan \left| \frac{b}{a} \right| & a > 0 \quad b < 0 \quad 4: \text{e kvadranten} \end{cases}$$

Några prefix $n \leftrightarrow 10^{-9}$ $\mu \leftrightarrow 10^{-6}$ $m \leftrightarrow 10^{-3}$ $k \leftrightarrow 10^3$ $M \leftrightarrow 10^6$

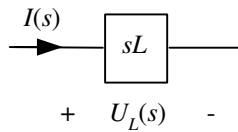
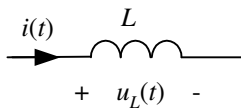
Gränsvinkelfrekvensen ω_g för ett filter ges av $|H(\omega)| = \frac{|H(\omega)|_{\text{MAX}}}{\sqrt{2}}$, där $H(\omega)$ är filtrets frekvensfunktion.

Diverse $\int \frac{dx}{a^2 + b^2 x^2} = \frac{1}{ab} \arctan \frac{bx}{a}$ $X(\Omega) = [X(z)]_{z=e^{j\Omega}}$

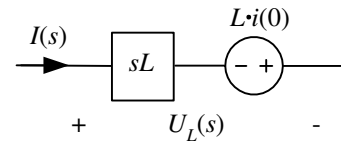
$t = n \cdot T_s$ $H(z) = K \cdot \frac{(z - z_{noll1})(z - z_{noll2})}{(z - z_{pol1})(z - z_{pol2})}$ $H(s) = K \cdot \frac{(s - s_{noll1})(s - s_{noll2})}{(s - s_{pol1})(s - s_{pol2})}$

Elektriska kretsar

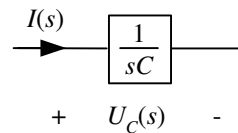
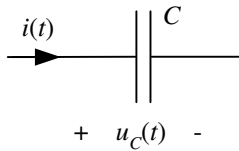
Tidplanet



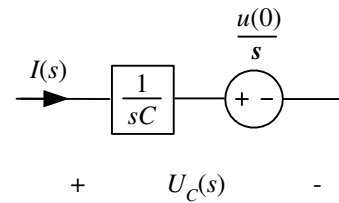
Utan begynnelseenergi



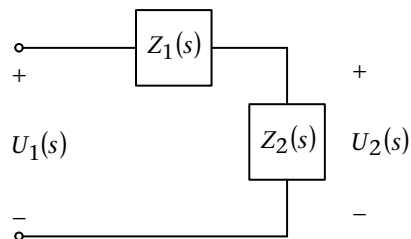
Med begynnelseenergi



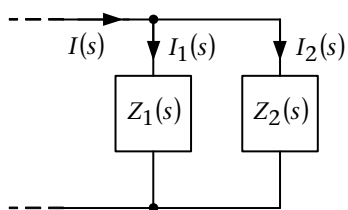
Utan begynnelseenergi



Med begynnelseenergi



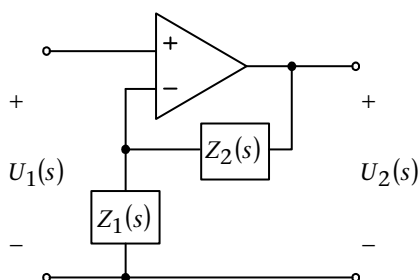
$$U_2(s) = \frac{Z_2(s)}{Z_1(s) + Z_2(s)} \cdot U_1(s)$$



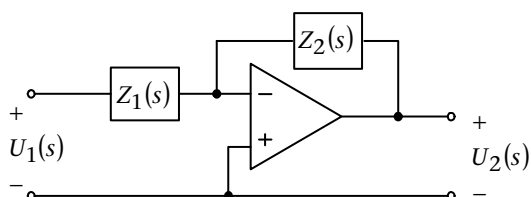
$$I_1(s) = \frac{Z_2(s)}{Z_1(s) + Z_2(s)} \cdot I(s)$$

$$I_2(s) = \frac{Z_1(s)}{Z_1(s) + Z_2(s)} \cdot I(s)$$

Några elektroniksamband



$$\frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{Z_1(s) + Z_2(s)}{Z_1(s)}$$



$$\frac{U_2(s)}{U_1(s)} = -\frac{Z_2(s)}{Z_1(s)}$$