

TENTAMEN

KURSNAMN	Linjära system
PROGRAM: namn åk / läsperiod	Mekatronik-, elektro- och dataingenjör 120p Åk 2 / Lp 1
KURSBETECKNING	SSY 020 0205
EXAMINATOR	Bill Karlström
TID FÖR TENTAMEN	Fredag 31 oktober 2014 kl 14.00 - 18.00
HJÄLPMEDEL	Typgodkänd räknare.
ANSV LÄRARE: namn telnr besöker tentamen kl	Bill Karlström 0708176535 ca 15.30
DATUM FÖR ANSLAG av resultat samt av tid och plats för granskning	Granskning kan ske onsdag 26 november kl 11.45 Plats anslås på kurshemsidan. Ev. ändringar anslås på kurshemsidan.
ÖVRIG INFORM. (ex.vis antal frågor, uppgifter, poäng o dyl)	Denna tentamen utgör ett komplement till övrig examination i kursen. För att få godkänt krävs 16p. För att få full poäng på en uppgift ska beräkningar redovisas så att det är lätt att följa dem.

**Lösningarna skall vara fullständigt redovisade så att dina resonemang går att följa!
Använda samband skall redovisas!**

- 1 a. Den tidkontinuerliga funktionen $x(t) = 10^6 \cdot t \cdot e^{-2500t} \cdot \cos 12500\pi t$ samplas från $t = 0$ med frekvensen 25kHz. Bestäm den diskreta signal som erhålles. 1p

- b. Bestäm Laplacetransformen $F(s)$ för funktionen $f(t) = \frac{3e^t + 2t}{e^{5t}}$. 1p

- c. Bestäm den diskreta signalen $x[n]$ då dess z-transform är $X(z) = \frac{2}{4 + \frac{1}{z}}$ 1p

2. Ett diskret system har impulssvaret $h[n] = 0,6^n$ Bestäm dess stegsvar. 3p

- 3 a. Ett diskret system har överföringsfunktionen $H(z) = \frac{z^2}{z^2 + 0,8z + a}$.

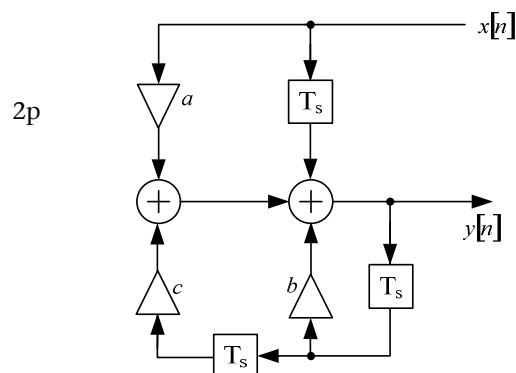
Bestäm ett värde på a i intervallet $-1 < a < 1$ som gör systemet instabilt.
Motivering krävs.

1p

- b. Bestäm systemets impulssvar då $a = -0,2$. 3p

4. Bestäm övrföringsfunktionen $H(z)$ för systemet t.h. 2p

Uttrycket skall vara förenklat så att det innehåller endast positiva z-potenser!



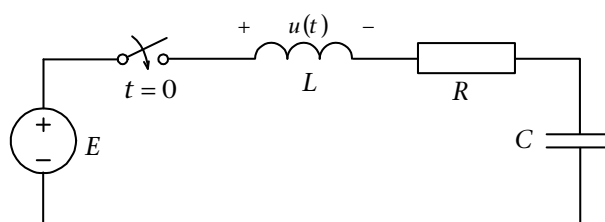
5. Betrakta signalen $x(t) = 4 - 7 \sin 12000t + 12 \sin(8800\pi t - 30^\circ) - 8 \cos 1840\pi t$. Bestäm minsta samplingsfrekvens för att signalen skall kunna återvinnas ur sina sampel 2p

6. I kretsen t.h. är kondensatorn urladdad vid tiden $t = 0$.

- a. Bestäm spänningen $u(t)$ för $t \geq 0$. 3p

$L = 1\text{H}$ $C = 625\mu\text{F}$ $R = 100\Omega$ $E = 10\text{V}$

- b. Antag att C kan väljas fritt medan de andra komponenterna är oförändrade. För vilka C blir $u(t)$ en svängande funktion? 3p



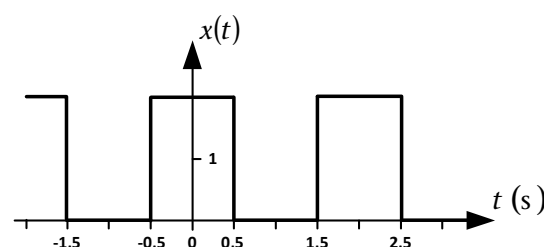
7. Signalen $x(t)$ i diagrammet t.h. kan approximeras som

$$x(t) = a_0 + a_1 \cdot \cos \omega_0 t + b_1 \cdot \sin \omega_0 t + a_2 \cdot \cos 2\omega_0 t + b_2 \cdot \sin 2\omega_0 t$$

Beräkna ω_0 samt koefficienterna a_0 , a_1 , b_1 , a_2 och b_2 i denna summa.

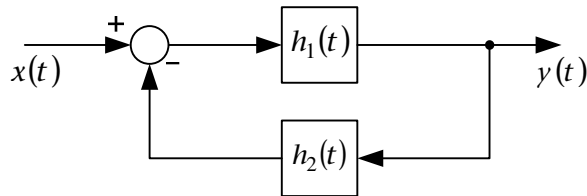
Svara med färdigräknade värden!!

4p

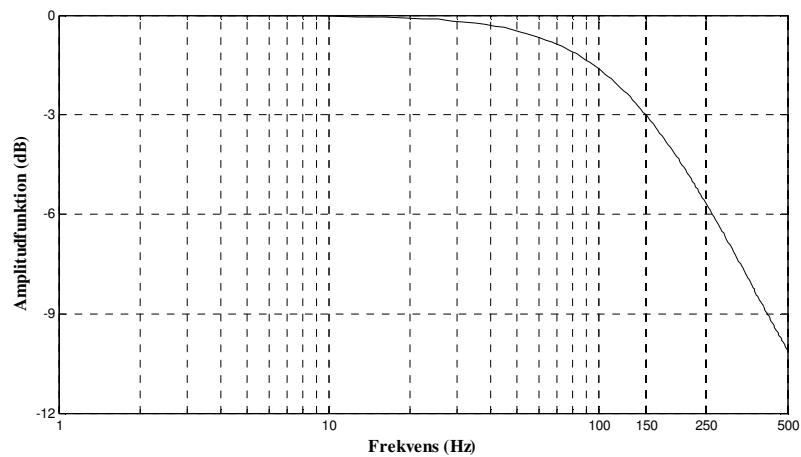
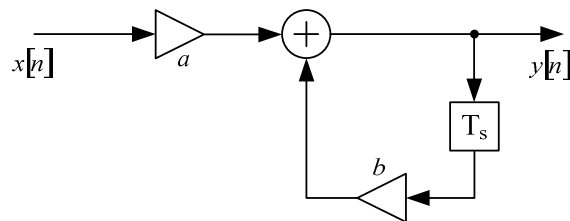


8. Ett diskret notchfilter med samplingsfrekvensen 300Hz och $H(1) = 1$ skall släcka frekvensen 50Hz. Polerna skall ha beloppet 0,9 och ligga så nära nollställena som möjligt. Bestäm filtrets dess differensekvationen. 5p

9. Figuren visar blockschemat för ett system där blockens impulssvar är $h_1(t) = 5e^{-5t} - 4e^{-4t}$ respektive $h_2(t) = A$. För vilka värden på A är systemet stabilt? 5p



10. Ett stabilt diskret LP-filter beskrivs av blockschemat nedan. Filtret har samplingsfrekvensen 2000Hz. Bestäm a och b så att filtrets amplitudfunktion uttryckt i dB blir enligt diagrammet. 6p



Formelsamling Linjära system

Fouriertransformen

Funktionen $f(t)$ är reellvärd och periodisk med perioden T och därmed grundvinkelfrekvensen ω_0 som ges av $\omega_0 T = 2\pi$

Analoga signaler

PERIODISKA EFFEKTSIGNALER

KOMPLEX FOURIERSERIE

En periodisk signal $f(t)$ med perioden T kan skrivas

$$f(t) = c_0 + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t} \quad \text{där} \quad c_0 = \frac{1}{T} \cdot \int_{1 \text{ period}} f(t) dt, \quad c_k = \frac{1}{T} \cdot \int_{1 \text{ period}} f(t) \cdot e^{-jk\omega_0 t} dt \quad k \neq 0$$

$$\text{och } \omega_0 = \frac{2\pi}{T}.$$

REELL FOURIERSERIE

En periodisk signal $f(t)$ med perioden T kan skrivas

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega_0 t + b_k \sin k\omega_0 t), \quad \text{där } \omega_0 = \frac{2\pi}{T}.$$

KOEFFICIENTSAMBAND:

$$a_0 = c_0 \quad 2c_k = a_k - jb_k \quad \text{så att} \quad a_k = 2 \operatorname{Re} c_k \quad b_k = -2 \operatorname{Im} c_k \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

ENERGISIGNALER

Funktionen $f(t)$ är reellvärd och absolut integrerbar:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad \text{där} \quad F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$\text{Parsevals formel:} \quad \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega$$

Diskreta signaler

$\{x[n]\}$ är en tidsdiskret funktion (signal) som uppstår när $x(t)$ samplas med frekvensen f_s .

De diskreta tidpunkterna ges av $t = n \cdot T_s$

Den normerade vinkelfrekvensen ges av $\Omega = 2\pi \frac{f}{f_s} = \omega T_s$, där f och ω är frekvens resp. vinkelfrekvens hos $x(t)$.

Energisignal:
$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\Omega n} \quad x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_a^{a+2\pi} X(\Omega) e^{j\Omega n} d\Omega$$

Periodisk effektsignal:

$x[n]$ är en periodisk effektsignal samplad N gånger per period, så att $T = N \cdot T_s$, där T är periodtiden hos den signal $x(t)$ som samplas.

Fourierkoefficienterna ges av $c_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-jk\Omega_0 n}$, där $\Omega_0 = \frac{2\pi}{N}$ $k = 0, 1, 2, \dots, N-1$

Fourierserien ges av $x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{jk\Omega_0 n}$, där $\Omega_0 = \frac{2\pi}{N}$.

N = signalens period (antal sampel per period)

Diskret fouriertransform , DFT

Den diskreta Fouriertransformen $Y[k]$ för en signal $y[n]$ definieras som

$$Y[k] = \sum_{n=0}^{N-1} y[n] \cdot W_N^{kn}, \quad \text{där } W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}} \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

Signalen $y[n]$ kan återvinnas ur sin DFT $Y[k]$ enligt

$$y[n] = \frac{1}{N} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} Y[k] \cdot W_N^{-kn}, \quad \text{där } W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}} \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

Laplacetransformen

Definition: $F(s) = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-st} dt$

Tidsfunktion	Transformuttryck
$\delta(t)$	1
$\sigma(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$	$\frac{1}{s}$
A (konstant)	$\frac{A}{s}$
$r(t) = t \cdot \sigma(t)$	$\frac{1}{s^2}$
$t^n, \quad n \geq 1$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{s + \alpha}$
$e^{-\alpha t} \cdot t^n, \quad n \geq 1$	$\frac{n!}{(s + \alpha)^{n+1}}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
$f'(t)$	$s \cdot F(s) - f(0)$
$f''(t)$	$s^2 \cdot F(s) - s \cdot f(0) - f'(0)$
$\int_0^t f(\tau) d\tau$	$\frac{1}{s} \cdot F(s)$
$e^{-\alpha t} \cdot f(t)$	$F(s + \alpha)$ Dämpningssatsen
$f(t - T) \cdot \sigma(t - T)$	$e^{-sT} \cdot F(s)$ Fördröjningssatsen

INVERTERINGSSATSERNA

Vi betraktar rationella uttryck av typen $F(s) = T(s)/N(s)$, där $\text{grad}T(s) < \text{grad}N(s)$

1.

En enkelpol $s = a$ till en rationell laplacetransform $F(s) = T(s)/N(s)$ ger vid inverstransformering upphov till en term $A \cdot e^{at}$, där konstanten A kan beräknas enligt formeln

$$A = \left[\frac{T(s)}{N'(s)} \right]_{s=a} \quad \text{där} \quad N'(s) = \frac{dN(s)}{ds}$$

2.

En pol $s = a$ av multipliciteten n till en rationell laplacetransform $F(s) = T(s)/N(s)$ ger vid inverstransformering upphov till en term $f_1(t)$ i tidsuttrycket som kan beräknas enligt följande formel:

$$f_1(t) = \frac{1}{(n-1)!} \cdot \left[\frac{d^{n-1}}{ds^{n-1}} \{ (s-a)^n \cdot F(s) \cdot e^{st} \} \right]_{s=a}$$

3.

Ett komplexkonjugerat polpar $s = \alpha \pm j\omega$ av multipliciteten 1 till en rationell laplacetransform

$F(s) = T(s)/N(s)$ ger vid inverstransformering upphov till en term $A \cdot e^{\alpha t} \cdot \cos(\omega t + \varphi)$, där de reella konstanterna A och φ kan bestämmas med hjälp av följande samband:

$$Ae^{j\varphi} = 2 \cdot \left[\frac{T(s)}{N'(s)} \right]_{s=\alpha+j\omega}$$

BEGYNNELSEVÄRDESSATSEN

Om $\text{grad}T(s) < \text{grad}N(s)$ gäller $\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot F(s)$

SLUTVÄRDESSATSEN

Om alla poler till $s \cdot F(s)$ ligger i det vänstra komplexa halvplanet, gäller

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0^+} s \cdot F(s)$$

z-transformen

Definition: $X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n] \cdot z^{-n}$

$\{x[n]\}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$	$X(z)$
$\{\delta[n]\}$	1
$\{\sigma[n]\} = \{1\}$	$\frac{z}{z-1}$
$r[n] = n \cdot \sigma[n]$	$\frac{z}{(z-1)^2}$
$\{a^n\}$	$\frac{z}{z-a}$
$\{e^{cn}\}$	$\frac{z}{z-e^c}$
$\{a^n \cdot n\}$	$\frac{az}{(z-a)^2}$
$\{a^n \cdot n^2\}$	$\frac{a(z+a)z}{(z-a)^3}$
$\{\sin[n\Omega]\}$	$\frac{z \cdot \sin \Omega}{z^2 - (2 \cos \Omega) \cdot z + 1}$
$\{\cos[n\Omega]\}$	$\frac{z \cdot (z - \cos \Omega)}{z^2 - (2 \cos \Omega) \cdot z + 1}$
$\{a^n \sin[n\Omega]\}$	$\frac{z \cdot a \sin \Omega}{z^2 - (2a \cos \Omega) \cdot z + a^2}$
$\{a^n \cos[n\Omega]\}$	$\frac{z \cdot (z - a \cos \Omega)}{z^2 - (2a \cos \Omega) \cdot z + a^2}$

Dämpningssatsen:

Om $\{x[n] \cdot \sigma[n]\} \supset X(z)$ så gäller $\{a^n x[n] \cdot \sigma[n]\} \supset X\left(\frac{z}{a}\right)$

Translation framåt (Fördröjningssatsen):

Om $\{x[n] \cdot \sigma[n]\} \supset X(z)$ så gäller $\{x[n-N] \cdot \sigma[n-N]\} \supset z^{-N} \cdot X(z)$

Translation bakåt: Om $\{x[n] \cdot \sigma[n]\} \supset X(z)$ så gäller

$\{x[n+N] \cdot \sigma[n]\} \supset z^N \cdot X(z) - z^N \cdot x[0] - z^{N-1} \cdot x[1] - \dots - z^1 \cdot x[N-1]$

INVERTERINGSSATSERNA

Satserna avser bestämning av tidsfunktionen $\{x[n]\}$ svarande mot transformen $X(z) = z \cdot \frac{T(z)}{N(z)}$

där $T(z)$ och $N(z)$ är polynom med reella koefficienter och där $\text{grad } T(z) < \text{grad } N(z)$.

Satserna avser vidare det fall att polerna är av multipliciteten 1.

1.

Om $z = c$ är en *enkelpol*, reell eller komplex, till transformen ovan ger denna som bidrag vid inverstransformeringen en term i den tiddiskreta funktionen $\{x[n]\}$ av formen $\{Kc^n\}$

där konstanten K kan bestämmas enligt formeln

$$K = \left[\frac{T(z)}{N'(z)} \right]_{z=c} = \frac{T(c)}{N'(c)}$$

2.

Om $z = a$ är en reell **multipl**pol med multipliciteten m kommer $x[n]$ att innehålla termen

$$x[n] = \frac{1}{(m-1)!} \left[\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left\{ (z-a)^m \frac{T(z)}{N(z)} z^n \right\} \right]_{z=a}.$$

3.

Om $z_1 = a + jb = re^{j\Omega}$ och $z_2 = a - jb = re^{-j\Omega}$ är ett *komplexkonjugerat polpar* till transformen $X(z)$ ovan ger detta polpar som bidrag vid inverstransformeringen en term i den tiddiskreta funktionen $\{x[n]\}$ av formen $\{A r^n \cos(\Omega n + \varphi)\}$

där konstanterna A och φ kan bestämmas enligt formeln

$$A e^{j\varphi} = 2 \cdot \left[\frac{T(z)}{N'(z)} \right]_{z=a+jb} = 2 \cdot \frac{T(a+jb)}{N'(a+jb)}$$

GRÄNSVÄRDESSATSERNA

Begynnelsevärdessatsen: $x[0] = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$

Slutvärdessatsen: Om $\lim_{n \rightarrow \infty} x[n]$ existerar,

så gäller

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x[n] = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \cdot X(z)$$

Komplettering till bokens formelsamling

Komplexa tal

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \qquad \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha \qquad \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha) \qquad \cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha)$$

$$e^{j\alpha} = \cos \alpha + j \cdot \sin \alpha \qquad e^{\pm jn\pi} = \cos(\pm n\pi) = (-1)^n$$

$$\cos \alpha = \frac{e^{j\alpha} + e^{-j\alpha}}{2} \qquad \sin \alpha = \frac{e^{j\alpha} - e^{-j\alpha}}{2j}$$

Rektangulär form: $z = x + jy$ $x = r \cdot \cos \varphi$ och $y = r \cdot \sin \varphi$

Polär form : $z = r \cdot e^{j\varphi}$ $\tan \varphi = \frac{y}{x}$ och $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

Eulers formel $e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \cdot \sin \omega t$

Speciellt: $\frac{1}{j} = -j$ $j = e^{j90^\circ}$ $\frac{1}{j} = e^{-j90^\circ}$

Polär $\rightarrow$ Rektangulär : $z = r \cdot e^{j\varphi} = a + jb$, där $a = r \cos \varphi$ $b = r \sin \varphi$

Rektangulär $\rightarrow$ Polär : $z = a + jb = |z| \cdot e^{j\varphi}$, där $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ där

$$\arg z = \varphi = \begin{cases} \varphi = \arctan \frac{b}{a} & a > 0 \quad b > 0 \quad 1: a \text{ kvadranten} \\ \varphi = 180^\circ - \arctan \left| \frac{b}{a} \right| & a < 0 \quad b > 0 \quad 2: a \text{ kvadranten} \\ \varphi = \arctan \left| \frac{b}{a} \right| - 180^\circ & a < 0 \quad b < 0 \quad 3: e \text{ kvadranten} \\ \varphi = -\arctan \left| \frac{b}{a} \right| & a > 0 \quad b < 0 \quad 4: e \text{ kvadranten} \end{cases}$$

Några prefix $n \leftrightarrow 10^{-9}$ $\mu \leftrightarrow 10^{-6}$ $m \leftrightarrow 10^{-3}$ $k \leftrightarrow 10^3$ $M \leftrightarrow 10^6$

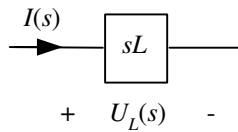
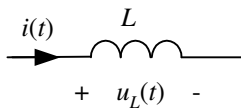
Gränsvinkelfrekvensen ω_g för ett filter ges av $|H(\omega)| = \frac{|H(\omega)|_{\text{MAX}}}{\sqrt{2}}$, där $H(\omega)$ är filtrets frekvensfunktion.

Diverse $\int \frac{dx}{a^2 + b^2 x^2} = \frac{1}{ab} \arctan \frac{bx}{a}$ $X(\Omega) = [X(z)]_{z=e^{j\Omega}}$

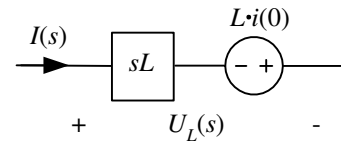
$t = n \cdot T_s$ $H(z) = K \cdot \frac{(z - z_{noll1})(z - z_{noll2})}{(z - z_{pol1})(z - z_{pol2})}$ $H(s) = K \cdot \frac{(s - s_{noll1})(s - s_{noll2})}{(s - s_{pol1})(s - s_{pol2})}$

Elektriska kretsar

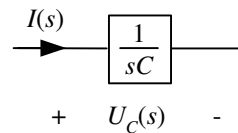
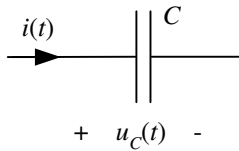
Tidplanet



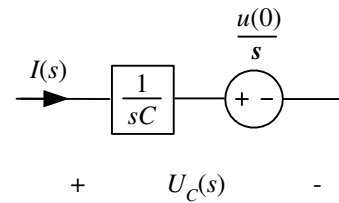
Utan begynnelseenergi



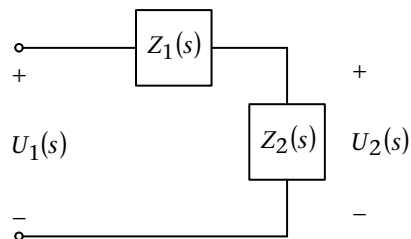
Med begynnelseenergi



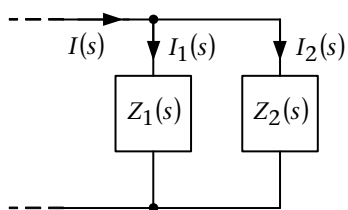
Utan begynnelseenergi



Med begynnelseenergi



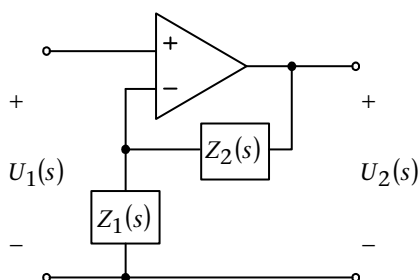
$$U_2(s) = \frac{Z_2(s)}{Z_1(s) + Z_2(s)} \cdot U_1(s)$$



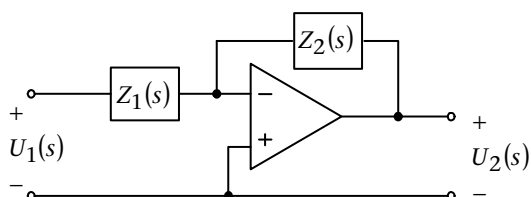
$$I_1(s) = \frac{Z_2(s)}{Z_1(s) + Z_2(s)} \cdot I(s)$$

$$I_2(s) = \frac{Z_1(s)}{Z_1(s) + Z_2(s)} \cdot I(s)$$

Några elektroniksamband



$$\frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{Z_1(s) + Z_2(s)}{Z_1(s)}$$



$$\frac{U_2(s)}{U_1(s)} = -\frac{Z_2(s)}{Z_1(s)}$$