10.1 a) $\ddot{y} + \dot{y} - 6y = \dot{x} + x$

$$\Rightarrow Ys^2 + Ys - 6Y = Xs + X$$

$$\Rightarrow Y(s^2+s-6) = X(s+1)$$

$$\Rightarrow G(s) = \frac{s+1}{s^2+s-6}$$

Kar. ekv $s^2+s-6=0 \Rightarrow s = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}+6} =$

$$= -\frac{1}{2} \pm \frac{5}{2}$$

$$\begin{cases} s_1 = 2 \\ s_2 = -3 \end{cases}$$

En pol i högra halvplanet

$\Rightarrow$ Systemet instabilt

---

d) $y''' + 3y'' - 2y' + y = u' + 5u$

$$Ys^3 + 3Ys^2 - 2Ys + Y = Us + 5U$$

$$Y(s^3+3s^2-2s+1) = U(s+5)$$

$$G(s) = \frac{s+5}{s^3+3s^2-2s+1}$$

Kar. ekv $s^3+3s^2-2s+1=0$

Routh's metod ger

s^3	1	-2	0
s^2	3	1	0
s^1	$-\frac{7}{3}$	0	
s^0	1		

$$\boxed{\frac{3\cdot(-2)-1\cdot 1}{3}}$$

$\Rightarrow$ Olika tecken i första kolumnen

$\Rightarrow$ Systemet instabilt

10.3 $$G_{TOT} = \frac{Y}{R} = \frac{\frac{3K}{s(1+2s)^2}}{1+\frac{3K}{s(1+2s)^2}} = \frac{3K}{s(1+2s)^2+3K} =$$

$$= \frac{3K}{4s^3+4s^2+s+3K}$$

Karakteristisk ekvation $4s^3+4s^2+s+3K=0$

Routh's metod ger

s^3	4	1	0
s^2	4	$3K$	0
s^1	$\frac{4-12K}{4}$	0	
s^0	$3K$		

Stabilitetsvillkor

$4-12K>0$

$\Rightarrow K < 1/3$

$3K>0 \Rightarrow K>0$

Systemet stabilt om $0 < K < 1/3$

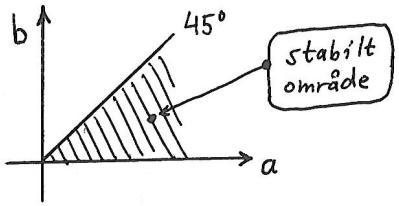
10.4 a) $s^3 + as^2 + s + b = 0$

Routh's metod ger

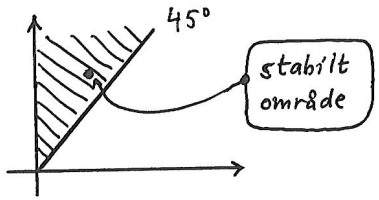
1	1
a	b
$\frac{a-b}{a}$	0
b	

$\Rightarrow$ Villkor för stabilitet

$$\begin{cases} a > 0 \\ a - b > 0 \\ b > 0 \end{cases} \Rightarrow b < a$$



b) Samma metod ger



10.8 Vi ritar Bodediagram för $G = \frac{4}{(1+s)^3}$

$K_{LF} = 4$

$\omega_{bryt} = 1$ rad/s (3-dubbel brytfrekvens)

$G(j\omega) = \frac{4}{(1+j\omega)^3} \Rightarrow \angle G(j\omega) = -3 \cdot \arctan \omega$

ω	$\angle G(j\omega)$
0,2	-34
0,5	-80
1	-135
2	-190
0,1	-17

Bodediagrammet (nästa sida) ger:

* Om K=1 fås $\begin{cases} \phi_m = 23^\circ \\ A_m = 6 \text{ dB} = 2 \text{ ggr} \end{cases}$ (stabilt)

* Vid frekvensen 1 rad/s har vi fasvridningen -135°, dvs avståndet 45° till -180°-graderslinjen

Vi ser $|G(1)| = 3$ dB $= 1{,}41$ ggr

Välj därför $K = \frac{1}{1{,}41} = 0{,}71$ för att få $\phi_m = 45^\circ$

* $K_{max} = 2$ (ty $A_m = 2$ ggr)

10.9

$$G_{RY} = \frac{Y}{R} = \frac{\frac{K}{s(1+Ts)^2}}{1 + \frac{K}{s(1+Ts)^2}} = \frac{K}{s(1+Ts)^2 + K} =$$

$$= \frac{K}{T^2 s^3 + 2Ts^2 + s + K}$$

Routh's metod ger

T^2	1
$2T$	K
$\frac{2T - T^2K}{2T}$	0
K	

$\Rightarrow$ Villkor för stabilitet

$2 - TK > 0$

$\Rightarrow K < \frac{2}{T}$

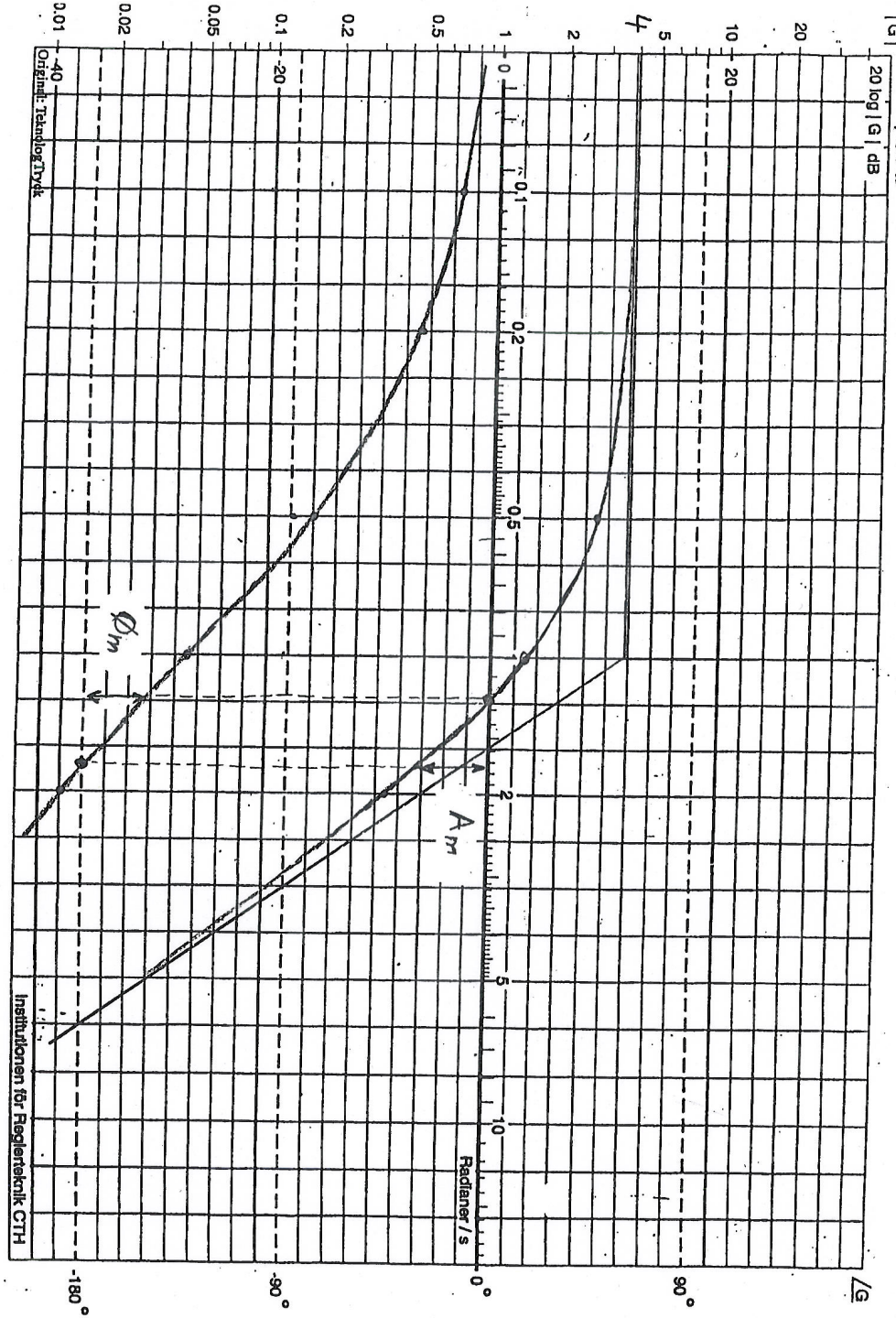
Gräns för instabilitet

$K_{max} = \frac{2}{T}$

Välj därför $K = \frac{1}{T}$

OBS! Amplitudmarginalen $A_m = 2$ innebär att förstärkningen kan ökas en faktor 2 innan systemet blir instabilt.

10.8



10.10

$$G_{RY} = \frac{Y}{R} = \frac{\frac{K}{s(1+s)}}{1+\frac{K}{s(1+s)(1+Ts)}} = \frac{K(1+Ts)}{s(1+s)(1+Ts)+K} =$$

$$= \frac{K+KTs}{Ts^3+(1+T)s^2+s+K}$$

Routh's metod

s^3	T	1	0
s^2	$1+T$	K	0
s^1	$\frac{(1+T)-TK}{1+T}$	0	
s^0	K		

Villkor för stabilitet $\quad 1+T-TK>0 \Rightarrow TK<1+T$

$$\Rightarrow K<\frac{1+T}{T}$$

$\Rightarrow$ Kritisk förstärkning $\quad K=\frac{1+T}{T}$

Förstärkning som ger amplitudmarginalen 2

$$K=\frac{1+T}{2T}$$

(Förstärkningen som ger $A_m=2$ är en funktion av T)

$$K=\frac{1+T}{2T} \Rightarrow 1+T=2KT \Rightarrow T(2K-1)=1$$

$$\Rightarrow T=\frac{1}{2K-1} \qquad T_{max}=\frac{1}{2K-1}$$

---

b) Om $K=3$ fås $T=\frac{1}{6-1}=\frac{1}{5}=0{,}2$

10.11 a)

$$e_0=\lim_{s\to 0}\frac{a}{1+G_RG_P}=\lim_{s\to 0}\frac{1}{1+\frac{(2s+3)}{(s+2)}\cdot\frac{2}{s(5s+1)}}=$$

$$=\lim_{s\to 0}\frac{(s+2)\cdot s\cdot(5s+1)}{(s+2)\cdot s\cdot(5s+1)+(2s+3)\cdot 2}=$$

$$=\lim_{s\to 0}\frac{5s^3+11s^2+2s}{5s^3+11s^2+5s+6}=\frac{0}{6}=0$$

$$e_1=\lim_{s\to 0}\frac{h}{s(1+G_RG_P)}=\lim_{s\to 0}\frac{1}{s\left(1+\frac{(2s+3)}{(s+2)}\cdot\frac{2}{s(5s+1)}\right)}=$$

$$=\lim_{s\to 0}\frac{(s+2)\cdot(5s+1)}{s(s+2)(5s+1)+2(2s+3)}=\lim_{s\to 0}\frac{5s^2+11s+2}{5s^3+11s^2+5s+6}=$$

$$=\frac{2}{6}=0{,}33$$

OBS! Eftersom processen har integration (ett s kan brytas ut ur nämnaren) kan man direkt sluta sig till att $e_0=0$ utan några beräkningar. Se slutsatserna i kapitel 10.2

10.15 $e_0 = \lim_{s\to 0} \dfrac{a}{1+G_R G_P} = \lim_{s\to 0} \dfrac{1}{1+\dfrac{5K}{(1+s)^3}} =$ (Sätt $a=1$)

$$= \lim_{s\to 0} \frac{(1+s)^3}{(1+s)^3+5K} = \frac{1}{1+5K}$$

Krav $\dfrac{1}{1+5K} < 0{,}1 \Rightarrow 1+5K > 10 \Rightarrow 5K > 9$

$$\Rightarrow K > \frac{9}{5} = 1{,}8$$

Obs! Vi måste också kontrollera stabiliteten

$$G_{RY} = \frac{Y}{R} = \frac{\dfrac{5K}{(1+s)^3}}{1+\dfrac{5K}{(1+s)^3}} = \frac{5K}{(1+s)^3+5K} = \frac{5K}{s^3+3s^2+3s+1+5K}$$

Routh's metod ger

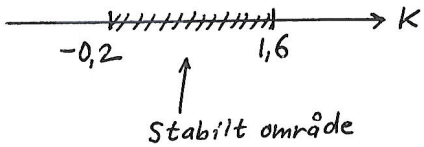
1	3
3	1+5K
$\frac{9-(1+5K)}{3}$	0
1+5K	

$\Rightarrow$ Villkor för stabilitet

① $9-(1+5K)>0 \Rightarrow 5K<8$

$\Rightarrow K<1{,}6$

② $1+5K>0 \Rightarrow K>-0{,}2$



Svar Det finns inget stabilt system som uppfyller kravet $e_0<0{,}1$ Kraven är oförenliga.

10.16 a) Robotarmen (Motor + Robot) har överföringsfunktionen

$$G = \frac{Y}{U} = \frac{0{,}02}{s(1+s)}$$

Hastigheten v är derivatan av positionen $v=\dot{y}$ (motsvarande Ys)

Enligt slutvärdessatsen fås sluthastigheten

$$\lim_{t\to\infty} v(t) = \lim_{s\to 0} sV(s) = \lim_{s\to 0} s\cdot Y\cdot s =$$

$$\lim_{s\to 0} s^2\cdot U\cdot G = \lim_{s\to 0} s^2\cdot\frac{24}{s}\cdot\frac{0{,}02}{s(1+s)} = 0{,}48 \text{ m/s}$$

b) Beräkna först vilket K som ger amplitudmarginalen $A_m = 1{,}8$

$$G_{RY} = \frac{\dfrac{0{,}02\cdot K}{(1+0{,}5s)\,s(1+s)}}{1+\dfrac{0{,}02K}{(1+0{,}5s)\,s(1+s)}} = \frac{0{,}02K}{(1+0{,}5s)s(1+s)+0{,}02K} =$$

$$= \frac{0{,}02K}{0{,}5s^3+1{,}5s^2+s+0{,}02K}$$

Rouths metod ger

s^3	0,5	1
s^2	1,5	0,02K
s^1	$\frac{1{,}5-0{,}01K}{1{,}5}$	0
s^0	0,02K	

$\Rightarrow$ Stabilitetsvillkor

$1{,}5-0{,}01K>0 \Rightarrow K<150$

$0{,}02K>0 \Rightarrow K>0$

Kritisk förstärkning:

$K_{kr} = 150$

10.16 forts

Amplitudmarginalen 1,8 fås om

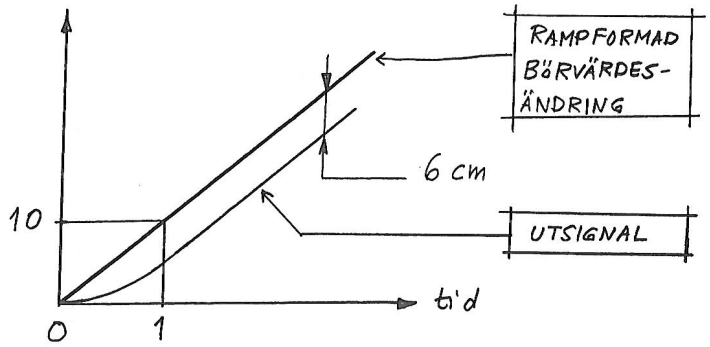
$$K = \frac{150}{1{,}8} = 83{,}3$$

Nu kan vi beräkna det kvarstående felet

$$e_1 = \lim_{s\to 0} \frac{h}{s(1+G_R G_P)} = \lim_{s\to 0} \frac{0{,}1}{s\left(1+\frac{0{,}02\cdot 83{,}3}{(1+0{,}5s)s(1+s)}\right)} =$$

$$= \lim_{s\to 0} \frac{0{,}1\,(1+0{,}5s)\,s\,(1+s)}{s\left[(1+0{,}5s)\,s\,(1+s)+0{,}02\cdot 83{,}3\right]} =$$

$$= \frac{0{,}1}{0{,}02\cdot 83{,}3} = 0{,}06 \text{ m} = 6 \text{ cm}$$



10.21 Ledtrådar :

① Bestäm överföringsfunktionen G_{WY} från W till Y. (Formler i kapitel 8)

② Bestäm motsvarande amplitudfunktion $A(\omega)$ genom att först bestämma frekvens-funktionen $G_{WY}(j\omega)$ och sedan $A(\omega) = |G_{WY}(j\omega)|$

③ Bestäm utsignalens amplitud A_Y enligt

$$A_Y = A_W \cdot |G_{WY}(2)| = 3{,}2 \cdot A(2)$$

10.22 a)

$$G_{TOT} = \frac{Y}{R} = \frac{\frac{K}{(1+s)^2}}{1 + \frac{K}{(1+s)^2}} = \frac{K}{s^2 + 2s + (1+K)}$$

$$G_{TOT}(j\omega) = \frac{K}{-\omega^2 + 2j\omega + (1+K)} = \{K=16\} = \frac{16}{(17-\omega^2) + 2j\omega}$$

$$A(\omega) = \frac{16}{\sqrt{(17-\omega^2)^2 + (2\omega)^2}} = \left\{\begin{matrix}\text{Sätt} \\ a=\omega^2\end{matrix}\right\} = \frac{16}{\sqrt{(17-a)^2 + 4a}} =$$

$$= \frac{16}{\sqrt{289 - 30a + a^2}}$$

$\left\{\begin{matrix}\text{Maxvärdet för } A(\omega) \text{ inträffar där polynomet} \\ P(a) = a^2 - 30a + 289 \text{ har sitt minima. Derivering ger:}\end{matrix}\right.$

$$\frac{dP}{da} = 2a - 30 = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 15 \quad \Rightarrow \quad \omega^2 = 15$$

Resonansfrekv. $\Rightarrow \omega_p = \sqrt{15}$ rad/s

Resonanstoppen blir

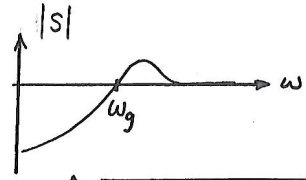
$$M_p = A(\sqrt{15}) = \frac{16}{\sqrt{2^2 + 4 \cdot 15}} = \frac{16}{\sqrt{64}} = 2$$

Svar: $\left\{\begin{matrix}\omega_p = \sqrt{15} \\ M_p = 2\end{matrix}\right.$

b) Känslighetsfunktionen

$$S = \frac{1}{1 + G_R G_P} = \frac{1}{1 + \frac{16}{(1+s)^2}} = \frac{(1+s)^2}{(1+s)^2 + 16} =$$

$$= \frac{s^2 + 2s + 1}{s^2 + 2s + 17}$$



Principiellt utseende på amplitudkurvan för S

$$S(j\omega) = \frac{1 - \omega^2 + 2j\omega}{17 - \omega^2 + 2j\omega}$$

$$|S(j\omega)| = \frac{\sqrt{(1-\omega^2)^2 + 4\omega^2}}{\sqrt{(17-\omega^2)^2 + 4\omega^2}} = 1$$

Vi ska bestämma den frekvens ω_g där $|S| = 1$

Ekv. $(1-\omega^2)^2 + 4\omega^2 = (17-\omega^2)^2 + 4\omega^2$ Sätt $\omega^2 = p$

$$\Rightarrow (1-p)^2 = (17-p)^2$$

$$\Rightarrow 1 - 2p + p^2 = 289 - 34p + p^2$$

$$\Rightarrow 32p = 288 \quad \Rightarrow \quad p = \frac{288}{32} = 9$$

$$\Rightarrow \omega_g = 3$$

Svar Regulatorn dämpar störningarna upp till frekvensen $\omega = 3$ rad/s. Därefter hänger den inte med längre.

10.24 Beräkning av K så att $\phi_m = 45°$

$$G_p(s) = \frac{0{,}5}{(1+s)(1+10s)} \Rightarrow G_p(j\omega) = \frac{0{,}5}{(1+j\omega)(1+10j\omega)}$$

$$\Rightarrow \varphi(\omega) = -\arctan(\omega) - \arctan(10\,\omega)$$

Vi provar oss fram till vilken frekvens som ger $\varphi(\omega) = -135°$ (där avståndet är 45° till −180°)

Med räknedosa fås $\omega_{135} = 1{,}19$ rad/s

$$A(\omega) = \frac{0{,}5}{\sqrt{1+\omega^2}\,\sqrt{1+100\,\omega^2}}$$

$$A(1{,}19) = \frac{0{,}5}{\sqrt{1+1{,}19^2}\,\sqrt{1+100\cdot 1{,}19^2}} = \frac{0{,}5}{1{,}5544\cdot 11{,}942} =$$

$$= 0{,}0269 \qquad \Rightarrow \text{Välj } K = \frac{1}{0{,}0269} = 37{,}2$$

Bestämning av känslighetsfunktionen

$$S = \frac{1}{1+G_R G_p} = \frac{1}{1+\dfrac{0{,}5\cdot 37{,}2}{(1+s)(1+10s)}} = \frac{(1+s)(1+10s)}{10s^2+11s+19{,}6}$$

Vi söker den frekvens ω_g där $|S| = 1$

(Detta är den högsta frekvensen där regulatorn kan dämpa processtörningar)

$$S(j\omega) = \frac{10(j\omega)^2 + 11\,j\omega + 1}{10(j\omega)^2 + 11\,j\omega + 19{,}2} = \frac{1-10\,\omega^2 + 11\,j\omega}{19{,}2 - 10\omega^2 + 11\,j\omega}$$

$$|S(\omega)| = \frac{\sqrt{(1-10\,\omega^2)^2 + 121\,\omega^2}}{\sqrt{(19{,}2-10\,\omega^2)^2 + 121\,\omega^2}} = 1$$

$$\Rightarrow (1-10\,\omega^2)^2 + 121\,\omega^2 = (19{,}2-10\omega^2)^2 + 121\,\omega^2$$

$\Rightarrow$ Sätt $\omega^2 = p$

$$\Rightarrow (1-10p)^2 = (19{,}2-10p)^2$$

$$\Rightarrow 1 - 20p + \cancel{100p^2} = 368{,}64 - 384p + \cancel{100p^2}$$

$$\Rightarrow 364p = 367{,}64$$

$$\Rightarrow p = 1{,}01 \quad \Rightarrow \quad \omega = 1{,}005 \text{ rad/min}$$

$$\Rightarrow T_{sv} = \frac{2\pi}{1{,}005} = 6{,}25 \text{ min}$$

Vi ser att regulatorn dämpar störningar med periodtider längre än 6,25 min (motsvarande $\omega = 1{,}005$ rad/min)

Regulatorn kan alltså inte dämpa de sinusformade störningarna.

En bättre lösning är att använda framkoppling (kapitel 12)

10.25 a) Störningsdämpningen vid låga frekvenser bestäms av <u>regulatorns</u> förstärkning vid låga frekvenser då $\omega \to 0$ (se kap 10.4).

I vårt fall gäller

$$G_{PI} = K\left(1 + \frac{1}{T_I s}\right) = \frac{K(1+T_I s)}{T_I s}$$

$$\lim_{s \to 0} G_{PI} = \frac{K}{T_I s} \quad \text{eller} \quad \lim_{\omega \to 0} |G_{PI}(j\omega)| = \frac{K}{T_I \omega}$$

Vi får alltså

$$J_V = \frac{1}{K_i} = \frac{T_I}{K}$$

För de tre regulatorerna får vi:

FALL NR	1	2	3
J_V	2,27	1,55	2,08

Regulator 2 är bäst

b) Styrsignalaktiviteten bestäms av regulatorns högfrekvensförstärkning

$$J_U = \lim_{\omega \to \infty} |G_{PI}(j\omega)| = \lim_{\omega \to \infty} \frac{K\sqrt{1+T_I^2\omega^2}}{T_I \omega} = K$$

För de tre regulatorerna fås:

FALL NR	1	2	3
J_U	2,2	1,35	0,48

Regulator 3 är bäst!

c) Regulator 1 är sämst i båda avseenden

11.2 Vi löser uppgiften genom att bestämma K_0 och T_0 ur Bodediagrammet för G.

$$G(s) = \frac{5e^{-10s}}{1+20s} \Rightarrow G(j\omega) = \frac{5 \cdot e^{-10j\omega}}{1+20j\omega}$$

$$\Rightarrow \varphi(\omega) = -10\omega\left(\frac{180}{\pi}\right) - \arctan 20\omega \quad \Big| \quad A(\omega) = \frac{5}{\sqrt{1+400\omega^2}}$$

Faskurvan ritas med beräkningar punkt för punkt medan amplitudkurvan kan ritas mha asymptoter.

Räknedosa ger:

ω	$\varphi(\omega)$
0,02	-33°
0,05	-74°
0,1	-121°
0,16	-164°
0,2	-191°
0,4	-312°

<u>Bodediagrammet ger</u>:

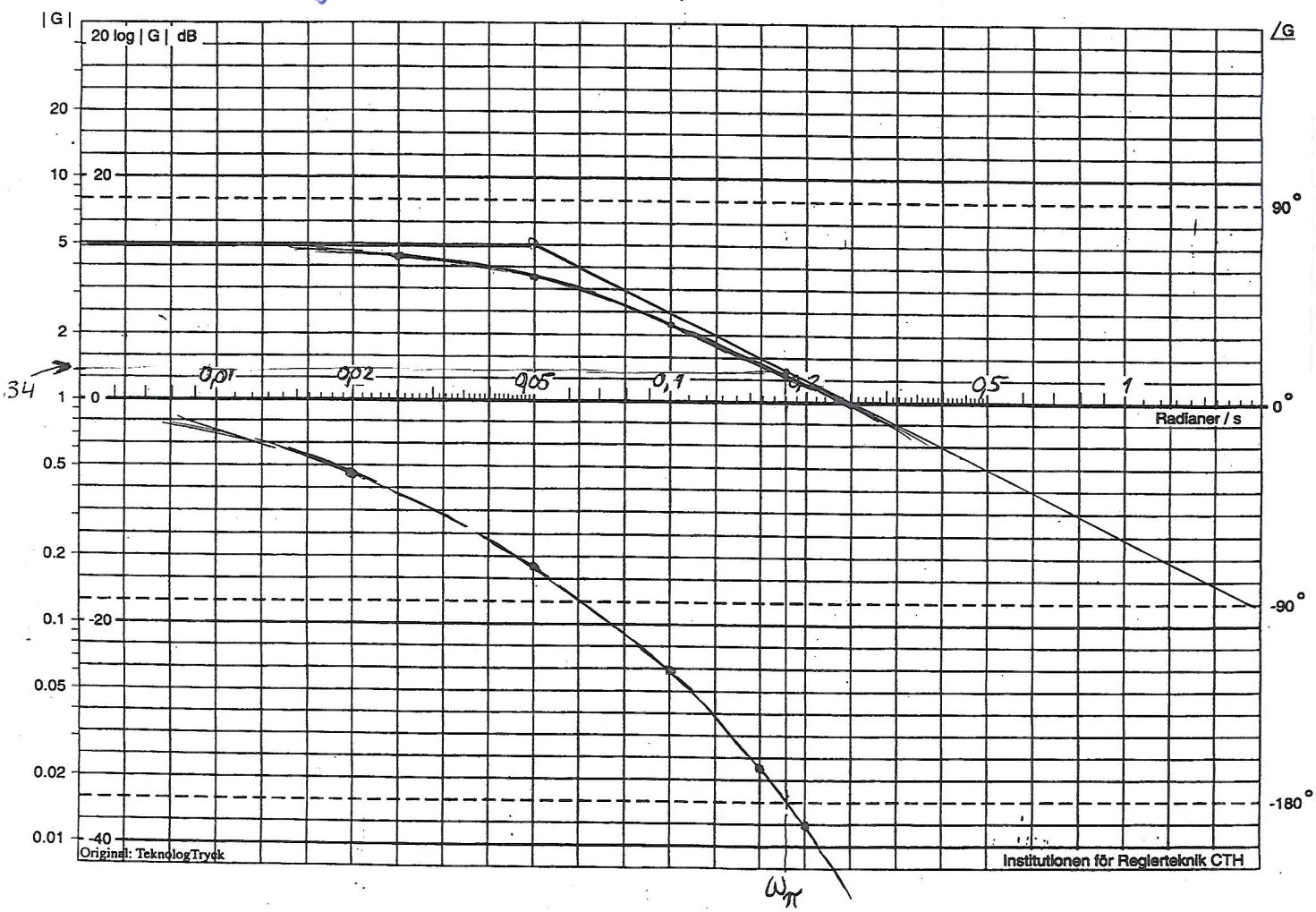
$$\omega_\pi = 0{,}18 \text{ rad/s} \Rightarrow T_0 = \frac{2\pi}{\omega_\pi} = \frac{2\pi}{0{,}18} = 34{,}9$$

$$K_0 = \frac{1}{|G(j\omega_\pi)|} = \frac{1}{1{,}34} = 0{,}75$$

<u>Ziegler-Nichols metod ger</u> (för PI)

$$\begin{cases} K = 0{,}45 \cdot 0{,}75 = 0{,}338 \\ T_I = 0{,}85 \cdot 34{,}9 = 29{,}7 \end{cases}$$

11.2 Bodediagram



11.3 Bodediagrammet ger

$$\begin{cases} \omega_\pi = 2 \text{ rad/s} \quad \Rightarrow T_0 = \dfrac{2\pi}{\omega_\pi} = 3{,}14 \\ K_0 = \dfrac{1}{|G(\omega_\pi)|} = \dfrac{1}{0{,}22} \approx 4{,}5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} K = 0{,}6 \cdot 4{,}5 = 2{,}7 \\ T_I = 0{,}5 \cdot 3{,}14 = 1{,}57 \\ T_D = 0{,}125 \cdot 3{,}14 = 0{,}39 \end{cases}$$

11.6 a) Vi vill ha $\phi_m = 45°$

$\Rightarrow$ Sök den frekvens där $\varphi(\omega) = -135°$

Bodediagrammet ger $\omega_{-135} = 2{,}1$ rad/s

Vi ser att $|G(2{,}1)| = 0{,}4$

$\Rightarrow$ Välj $K = \dfrac{1}{0{,}4} = 2{,}5$ ggr (8 dB)

b) $$e_0 = \lim_{s \to 0} \frac{1}{1 + G_R G_P} = \frac{1}{1 + K_{LF}} = \frac{1}{1 + 2{,}5 \cdot 2{,}5} = 0{,}138$$

$e_1 = \infty$

Processens lågfrekvens-förstärkning

Regulatorns förstärkning

11.9 a) $G_p(s) = \dfrac{2}{(1+s)^2} \Rightarrow G_p(j\omega) = \dfrac{2}{(1+j\omega)^2}$

Uppgiften löses med Bodediagram

$$\Rightarrow A(\omega) = \frac{2}{1+\omega^2} \qquad \varphi(\omega) = -2\arctan\omega$$

Bodediagram för G_p ger (se nästa sida)

- För att få $\phi_m = 45°$ måste vi ha $\omega_c = 2{,}4$ rad/s

$$A(2{,}4) = \frac{2}{1+2{,}4^2} = 0{,}296 \Rightarrow K = \frac{1}{0{,}296} = 3{,}38 \approx 3{,}4$$

Välj $K = 3{,}4$

---

b) I uppgift b får vi kretsöverföringen

$$G_k(s) = \frac{1}{T_I s}\cdot\frac{2}{(1+s)^2} = K_I \cdot \frac{2}{s(1+s)^2} \quad \text{där } K_I = \frac{1}{T_I}$$

Vi ritar Bodediagram för $\dfrac{2}{s(1+s)^2}$ och löser uppgiften på samma sätt som i uppgift a

Byt s mot $j\omega \Rightarrow \dfrac{2}{j\omega(1+j\omega)^2}$ $\begin{cases} A(\omega) = \dfrac{2}{\omega(1+\omega^2)} \\ \varphi(\omega) = -90° - 2\arctan\omega \end{cases}$

Bodediagrammet (två sidor framåt) ger:

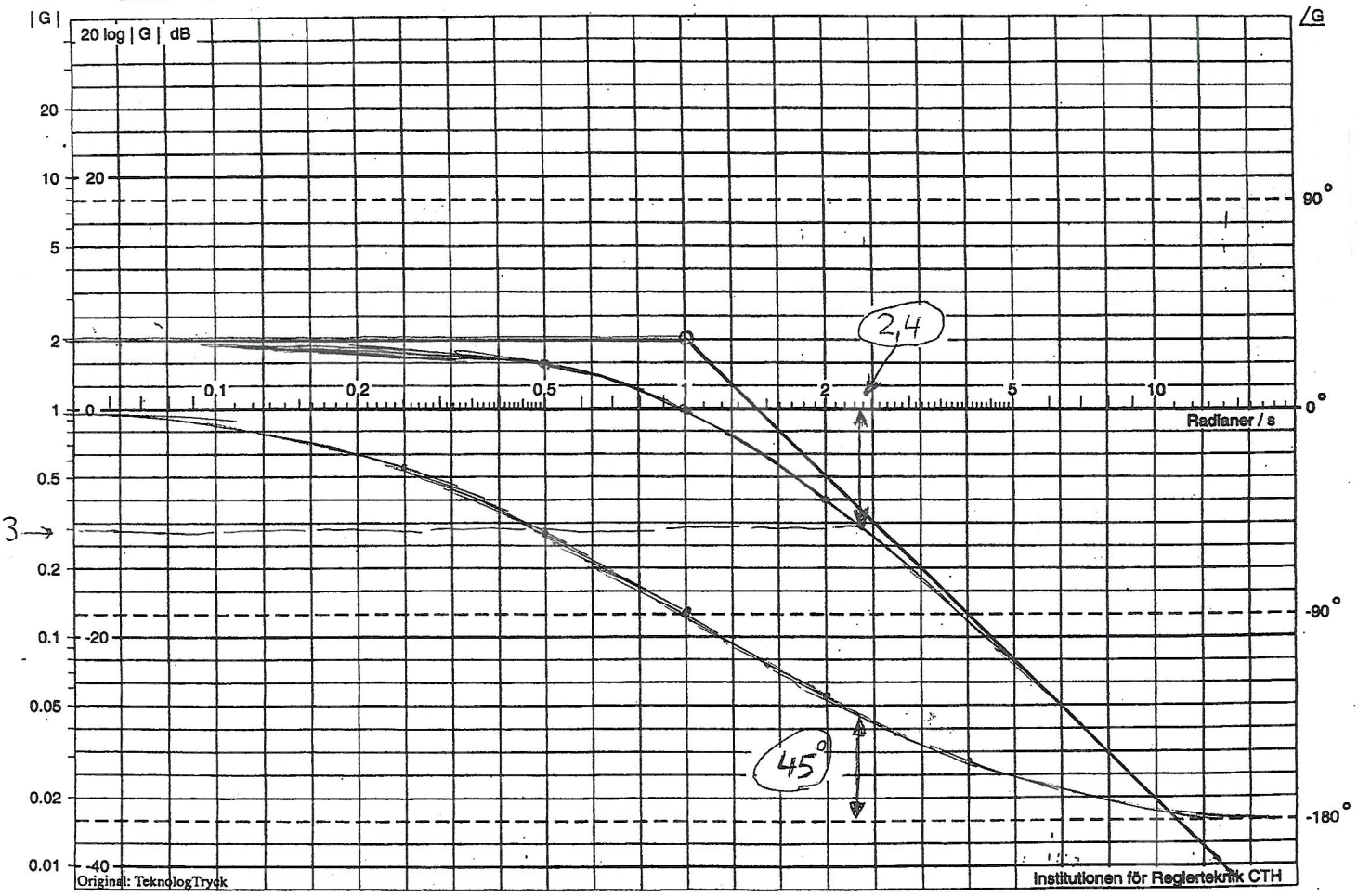
- För att få $\phi_m = 45°$ måste vi ha $\omega_c = 0{,}41$ rad/s

$$A(0{,}41) = 4 \Rightarrow K_I = \frac{1}{4} = 0{,}25 \Rightarrow \text{Välj } T_I = 4$$

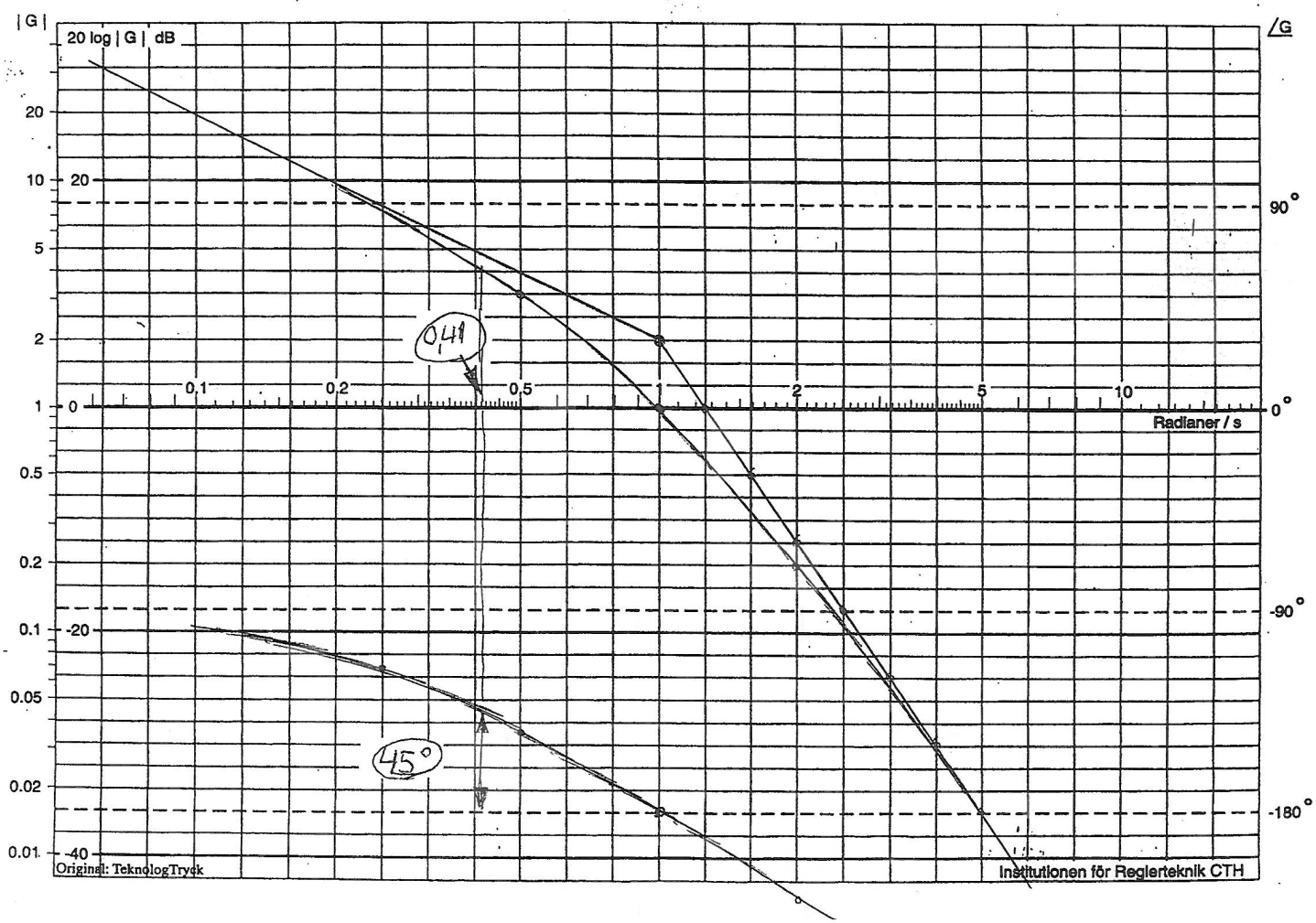
c)

	ω_c	$t_r \approx 1{,}4/\omega_c$
P	2,4 rad/s	0,58
I	0,41 rad/s	3,41

11.9 a


|G|
20 log |G| dB
/G
20
10
5
2
1
0.5
0.2
0.1
0.05
0.02
0.01
20
0
-20
-40
0,1
0,2
0,5
1
2
5
10
Radianer / s
90°
0°
-90°
-180°
2,4
45°
3
Original: TeknologTryck
Institutionen för Reglerteknik CTH

11.9 b


|G|
20 log |G| dB
/G
20
10
5
2
1
0.5
0.2
0.1
0.05
0.02
0.01
20
0
-20
-40
0,1
0,2
0,5
1
2
5
10
Radianer / s
90°
0°
-90°
-180°
0,41
45°
Original: TeknologTryck
Institutionen för Reglerteknik CTH

11.11 a) Vi använder arbetsmetodiken för PI-regulatorer (avsnitt 11.3 i faktaboken)

Önskad fasmarginal $\phi_m = 45°$

$\Rightarrow$ Sök den frekvens där fasreserven (avståndet till $-180°$) är $45 + 11 = 56°$

$\omega = 1{,}7$ rad/s

$|G(1{,}7)| \approx 0{,}55 \quad \Rightarrow$ Välj $K = \dfrac{1}{0{,}55} = 1{,}8$ (5 dB)

Välj slutligen T_I så att brytfrekvensen för PI-regulatorn blir $0{,}2 \cdot \omega_c$:

$$T_I = \frac{1}{0{,}2 \cdot 1{,}7} = 2{,}94$$

$$J_v = \frac{1}{K_1} = \frac{1}{\frac{K}{T_1}} = \frac{T_1}{K} = \frac{2{,}94}{1{,}8} = 1{,}63$$

b) Löses på samma sätt som 11.11 a

11.12 Ledtråd:

Prova dig fram med Matlab. Använd kommandot <u>margin</u> som direkt ger fasmarginalen.

Använd kretsöverföringen

$$G_k(s) = \frac{K\,(1 + T_1 s)}{(1+s)^2 (1 + 0{,}05 s) \cdot T_1 s}$$

Använd följande formel för J_v

$$J_v = \frac{1}{K_1} = \frac{T_1}{K}$$

11.15 Ledtrådar för att lösa uppgiften

1. Bestäm överföringsfunktionen med stegsvarsanalys (kapitel 7.6)

$$\begin{cases} \text{Dödtid } 1{,}5\ s \\ \text{Tidskonstant } 3\ s \\ \text{Statisk först. } 5 \end{cases} \Rightarrow G(s) = \frac{5\,e^{-1{,}5 s}}{1 + 3s}$$

2. Bestäm lämplig regulatortyp
Pga kraven $e_0 = 0$ och $e_v = 0$ måste vi ha en regulator med integralverkan

Alt 1 I-regulator $\quad G_R = \dfrac{1}{T_I s}$

Alt 2 PI-regulator $\quad G_R = K\left(1 + \dfrac{1}{T_I s}\right)$

(Det finns många lösningar på denna uppgift

3. Bestäm parametrarna i regulatorn

- I fall 1 (I-regulator) kan samma metod användas som i uppgift 10.9 b
- I fall 2 (PI-regulator) kan arbetsmetodiken i kapitel 10.3 användas

4. Beräkning av J_v
- I fall 1 gäller $\quad J_v = \dfrac{1}{K_I} = T_I$
- I fall 2 gäller $\quad J_v = \dfrac{1}{K_I} = \dfrac{T_I}{K}$

11.15 b) Löses med samma metod som uppgift 11.2.

$$J_V = \frac{T_I}{K}$$

11.16 Systemets kretsöverföring är

$$G_K = \frac{3e^{-Ts}}{s(1+s)} \Rightarrow G_K(j\omega) = \frac{3e^{-Tj\omega}}{j\omega(1+j\omega)}$$

$$|G_K| = \frac{3}{\omega\sqrt{1+\omega^2}} \qquad \angle G_K = -T\omega\left(\frac{180}{\pi}\right) - 90 - \arctan(\omega)$$

Dödtiden påverkar inte amplitudkurvan.
Vi beräknar den frekvens där $|G_K| = 0{,}5$
(motsv amplitudmarginalen $A_m = 2$)

$$\frac{3}{\omega\sqrt{1+\omega^2}} = 0{,}5 \Rightarrow \omega\sqrt{1+\omega^2} = 6$$

$$\Rightarrow \omega^2(1+\omega^2) = 36 \Rightarrow \omega^4 + \omega^2 - 36 = 0$$

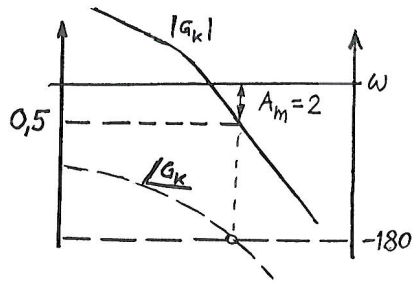
$$\Rightarrow \text{Sätt } p = \omega^2 \Rightarrow p^2 + p - 36 = 0$$

$$\Rightarrow p = -0{,}5 \pm \sqrt{36{,}25} = 5{,}52 \Rightarrow \omega = 2{,}35$$

För att få $A_m = 2$ ggr krävs att $\angle G_K(2{,}35) = -180°$

$$\Rightarrow -T \cdot \underbrace{2{,}35\left(\frac{180}{\pi}\right)}_{134{,}63} - 90° - \underbrace{\arctan(2{,}35)}_{66{,}95} = -180°$$

$$\Rightarrow T \cdot 134{,}63 = 23{,}05 \Rightarrow T = 0{,}171$$



Svar : Max(T) = 0,171

11.17

$$G_{TOT} = \frac{Y}{R} = \frac{\dfrac{K}{(1+0{,}1s)\,s\,(1+Ts)}}{1+\dfrac{K}{(1+0{,}1s)\,s\,(1+Ts)}} =$$

$$= \frac{K}{(1+0{,}1s)\,s\,(1+Ts)+K} = \frac{K}{0{,}1\,Ts^3+(T+0{,}1)\,s^2+s+K}$$

Routh's metod ger

s^3	$0{,}1\,T$	1
s^2	$T+0{,}1$	K
s^1	$\dfrac{T+0{,}1-0{,}1\,KT}{T+0{,}1}$	0
s^0	K	

Stabilitetsvillkor

$$T+0{,}1-0{,}1\,KT>0$$

$$\Rightarrow\ 0{,}1\,KT < T+0{,}1$$

$$\Rightarrow\ K < \frac{T+0{,}1}{0{,}1\cdot T}$$

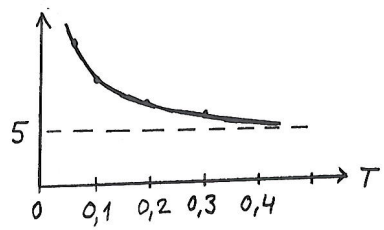
Den kritiska förstärkningen är

$$K_{max} = \frac{T+0{,}1}{0{,}1\,T}$$

För att få amplitudmarginalen 2 krävs:

$$K = \frac{K_{max}}{2} = \frac{T+0.1}{0.2\cdot T} = 5+\frac{1}{2T}$$

$$\lim_{T\to\infty} K = 5^+$$



Större tidskonstant kräver lägre förstärkning.

12.4

Enligt uppgiften ska den totala överföringsfunktionen $R\to Y$ uppfylla följande krav

Tidskonstanter
$T=2$ resp $T=3$
Inget kvarstående fel
dvs $|G_{TOT}(0)|=1$

$$\Rightarrow G_{TOT} = \frac{1}{(1+2s)(1+3s)}$$

Formlerna i kapitel 12.4 ger därför

$$G_R = \frac{G_{TOT}}{G_P(1-G_{TOT})} = \frac{\dfrac{1}{(1+2s)(1+3s)}}{\dfrac{5}{(1+4s)(1+6s)}\left[1-\dfrac{1}{(1+2s)(1+3s)}\right]} =$$

$$= \frac{(1+4s)(1+6s)}{5\left[(1+2s)(1+3s)-1\right]} = \frac{(1+4s)(1+6s)}{5\,(6s^2+5s)} =$$

$$= \frac{24s^2+10s+1}{30s^2+25s}$$

12.6 a)

$$\begin{cases} G_P = \dfrac{3}{s(1+4s)} \\[2ex] G_{TOT} = \dfrac{1}{1+2s} \end{cases}$$

$$G_R = \frac{G_{TOT}}{G_P\,(1 - G_{TOT})} = \frac{\dfrac{1}{1+2s}}{\dfrac{3}{s(1+4s)}\left[1 - \dfrac{1}{1+2s}\right]} =$$

$$= \frac{s(1+4s)}{3\,[1+2s-1]} = \frac{s(1+4s)}{6s} = \frac{1}{6}(1+4s)$$

b) Det är en PD-regulator med $K = \frac{1}{6}$ och $T_D = 4$

12.8 Vi börjar med att dimensionera en PI-regulator för den "dödtidsfria" processen (enligt metod kap 12.4)

Process $G_P = \dfrac{1}{(1+s)^3}$ $\quad G_P(j\omega) = \dfrac{1}{(1+j\omega)^3}$

Bestäm K_0 och T_0 enligt Ziegler-Nichols

$\varphi(\omega) = -3 \arctan(\omega) = -180$

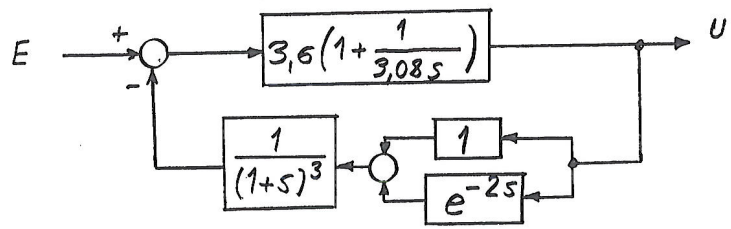
$\Rightarrow \arctan(\omega) = 60 \quad \Rightarrow \omega_\pi = 1{,}732$ rad/s

$\Rightarrow T_0 = \dfrac{2\pi}{\omega_\pi} = 3{,}628$ s

$$K_0 = \frac{1}{|G_P(\omega_\pi)|} = \frac{1}{\dfrac{1}{(1+1{,}732^2)^{3/2}}} = (1+3)^{3/2} = 8$$

$\left\{\begin{matrix} T_0 = 3{,}628 \\ K_0 = 8 \end{matrix}\right\}$ Ziegler-Nichol's ger: $\left\{\begin{matrix} K = 3{,}6 \\ T_I = 3{,}08 \end{matrix}\right.$

Enligt kap 12.4 ska regulatorn ha följande struktur



12.10 a) $G_F = \dfrac{0{,}1}{s(1+5s)}$ $\qquad G_{TOT} = \dfrac{1}{(1+Ts)^2}$

Formler i kap 12.4 ger

$$G_R = \frac{G_{TOT}}{G_F(1-G_{TOT})} = \frac{\dfrac{1}{(1+Ts)^2}}{\dfrac{0.1}{s(1+5s)}\left(1-\dfrac{1}{(1+Ts)^2}\right)} =$$

$$= \frac{s(1+5s)}{0{,}1\left((1+Ts)^2-1\right)} = \frac{10\cdot s(1+5s)}{T^2s^2+2Ts} = \frac{10(1+5s)}{T(2+Ts)}$$

Om $T=5$ fås $\quad G_R = \dfrac{1+5s}{1+2{,}5s}$ (Lead-filter)

Om $T=4$ fås $\quad G_R = 1{,}25\cdot\dfrac{1+5s}{1+2s}$ (Lead-filter)

b) Max styrsignal för Lead-filter fås vid tiden $t=0^+$. Begynnelsevärdessatsen ger:

$$\max(u) = \lim_{s\to\infty} s\cdot\frac{0{,}3}{s}\cdot 1{,}25\cdot\frac{1+5s}{1+2s} =$$

$$= 0{,}3\cdot 1{,}25\cdot 2{,}5 = 0{,}9375 \text{ rad}$$

c) Kretsöverföringen blir

$$G_K = \frac{0.1}{s(1+5s)}\cdot\frac{10(1+5s)}{T(2+Ts)} = \frac{1}{Ts(2+Ts)}$$

$$G_K(j\omega) = \frac{1}{Tj\omega(2+Tj\omega)} \qquad \angle G_K = -90 - \arctan\left(\frac{T\omega}{2}\right)$$

Bestäm den frekvens ω_c där $|G_K|=1$

$$|G_K| = \frac{1}{T\omega\sqrt{4+T^2\omega^2}} = 1$$

$\Rightarrow T^2\omega^2(4+T^2\omega^2)=1 \qquad$ Sätt $T^2\omega^2 = p$

$\Rightarrow p(4+p)=1$

$\Rightarrow p^2+4p-1=0$

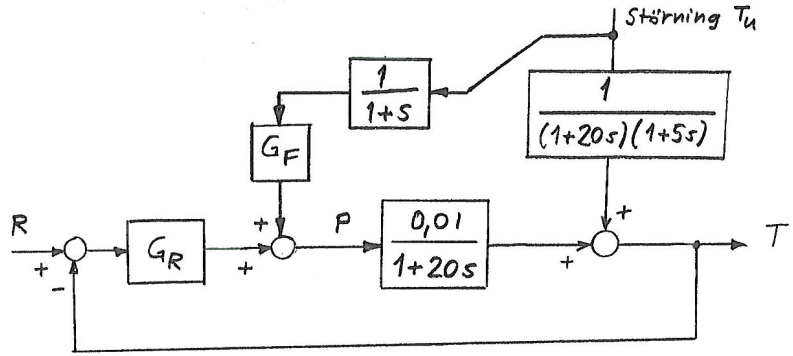
$\Rightarrow p = -2 \pm\sqrt{4+1} = -2 \pm\sqrt{5} = 0{,}236$

$\Rightarrow \omega_c = \dfrac{\sqrt{p}}{T} = \dfrac{0{,}4859}{T}$

$$\phi_m = 180+\varphi(\omega_c) = 180-90-\arctan\left(\frac{0{,}4859}{2}\right) = 76{,}3^\circ$$

(fasmarginalen är oberoende av T, den kan även bestämmas med Bodediagram för G_K)

12.11 Strukturen på framkopplingen ges av följande blockschema



För att eliminera inverkan av störningen krävs:

$$T_u \cdot \frac{1}{(1+s)} \cdot G_F \cdot \frac{0{,}01}{(1+20s)} = -T_u \cdot \frac{1}{(1+20s)(1+5s)}$$

Vilket ger:

$$G_F = \frac{-100(1+s)}{(1+5s)}$$

14.1 a) $y''' + 5y'' + 3y' + 7y = 5u$

$$\Rightarrow Ys^3 + 5Ys^2 + 3Ys + 7Y = 5U$$

$$Y(s^3 + 5s^2 + 3s + 7) = 5U$$

$$\Rightarrow G = \frac{Y}{U} = \frac{5}{s^3 + 5s^2 + 3s + 7}$$

Formel för omvandling till tillståndsmodell ger:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -3 & -7 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

---

e) $$G(s) = \frac{2s^2 + 15s + 5}{s^2 + 5s + 2} = \frac{2(s^2 + 5s + 2) + 5s + 1}{s^2 + 5s + 2} =$$

$$= 2 + \frac{5s+1}{s^2 + 5s + 2} = \frac{Y}{U}$$

Direkt koppling

Enligt formler för omskrivning fås

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + 2u$$

14.3 a) $G = C(sI-A)^{-1}B$

Formel som används

Enligt formel för inverkering av 2x2-matriser

$$(sI-A)^{-1} = \begin{bmatrix} s-3 & -1 \\ -1 & s-2 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\underbrace{(s-3)(s-2)-1}_{s^2-5s+5}} \begin{bmatrix} s-2 & 1 \\ 1 & s-3 \end{bmatrix}$$

$$C(sI-A)^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s-2 & 1 \\ 1 & s-3 \end{bmatrix}}{s^2-5s+5} = \frac{1}{s^2-5s+5} \cdot \begin{bmatrix} s-1 & s-2 \end{bmatrix}$$

$$G = C(sI-A)^{-1} \cdot B = \frac{1}{s^2-5s+5} \begin{bmatrix} s-1 & s-2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{2s-4}{s^2-5s+5}$$

b) På samma sätt fås

$$(sI-A)^{-1} = \begin{bmatrix} s+4 & 0 \\ -1 & s-2 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\underbrace{(s+4)(s-2)+1}_{s^2+2s-7}} \begin{bmatrix} s-2 & 0 \\ 1 & s+4 \end{bmatrix}$$

$$C(sI-A)^{-1} = \ldots = \frac{1}{s^2+2s-7} \cdot \begin{bmatrix} s+1 & 3s+12 \end{bmatrix}$$

$$G = C(sI-A)^{-1} \cdot B = \ldots = \frac{5s+14}{s^2+2s-7}$$

14.4 b) Varje block med första ordningens överföringsfunktion görs om till en diff-ekvation:

Vi får

$$\frac{X_1}{U} = \frac{3}{2+s} \Rightarrow X_1(2+s) = 3U \Rightarrow X_1 s + 2X_1 = 3U$$

Inverstransformering ger

$$\boxed{\dot{x}_1 = -2x_1 + 3u}$$

$$\frac{X_2}{U} = \frac{5}{4+2s} \Rightarrow X_2(4+2s) = 5U \Rightarrow 2X_2 s + 4X_2 = 5U$$

$$\Rightarrow \boxed{\dot{x}_2 = -2x_2 + 2{,}5u}$$

$$\frac{X_3}{X_1+X_2} = \frac{4}{3+s} \Rightarrow X_3(3+s) = 4(X_1+X_2) \Rightarrow X_3 s + 3X_3 = 4X_1 + 4X_2$$

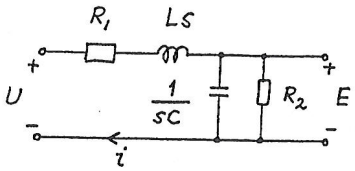
$$\Rightarrow \boxed{\dot{x}_3 = -3x_3 + 4x_2 + 4x_1}$$

På matrisform fås

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 4 & 4 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 2{,}5 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot u \\ y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \end{cases}$$

Den sista ekvationen motsvarar det sista blocket där $y = 3x_3$

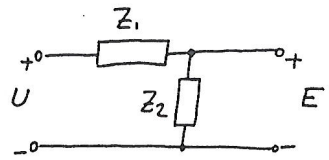
14.6 a)



Välj tillståndsvariablerna

$$\begin{cases} x_1 = e \\ x_2 = i \end{cases}$$

Förenklat schema med komplexa impedanser



$$Z_1 = R_1 + Ls$$

$$Z_2 = \frac{\frac{1}{sC}\cdot R_2}{\frac{1}{sC} + R_2} = \frac{R_2}{1 + R_2 C s}$$

Ekvationer för systemet:

$$\begin{cases} U = I(R_1 + Ls) + E & (1) \\ E = \dfrac{I R_2}{1 + R_2 C s} & (2) \end{cases}$$

Försök att ställa upp ekvationer som innehåller derivatorna av e och i.

$$(1) \Rightarrow \quad ILs = -E - I\cdot R_1 + U$$

$$(2) \Rightarrow \quad ER_2 C s = -E + IR_2$$

Omformning ger:

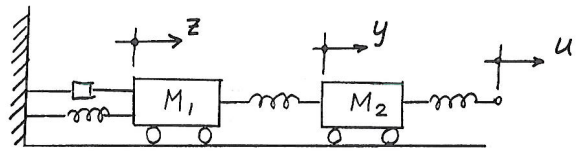
$$\begin{cases} I\cdot s = -E\left(\frac{1}{L}\right) - I\left(\frac{R_1}{L}\right) + U\left(\frac{1}{L}\right) \\ E\cdot s = -E\left(\frac{1}{R_2 C}\right) + I\left(\frac{1}{C}\right) \end{cases}$$

Ekvationer på tillståndsform:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_2 C} & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{R_1}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} \cdot u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

14.7



Newtons 2:a lag ger

Massa 1: $\quad M_1 \ddot{z} = k(y - z) - kz - b\dot{z} \quad (1)$

Massa 2: $\quad M_2 \ddot{y} = k(u - y) - k(y - z) \quad (2)$

Välj följande tillståndsvariabler

$$\begin{cases} x_1 = z & \Rightarrow \dot{x}_1 = x_2 \\ x_2 = \dot{z} & \\ x_3 = y & \Rightarrow \dot{x}_3 = x_4 \\ x_4 = \dot{y} & \end{cases}$$

Byte till tillståndsvariabler ger

$$(1) \Rightarrow \quad M_1 \dot{x}_2 = k(x_3 - x_1) - kx_1 - bx_2$$

$$(2) \Rightarrow \quad M_2 \dot{x}_4 = k(u - x_3) - k(x_3 - x_1)$$

På matrisform fås

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{2k}{M_1} & -\frac{b}{M_1} & \frac{k}{M_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k}{M_2} & 0 & \frac{-2k}{M_2} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{k}{M_2} \end{bmatrix} \cdot u$$

$$\begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

14.8

$$\boxed{\text{Allmän lag: } \frac{dV}{dt} = u_{in} - u_{ut} \quad \text{där } V = Ah \qquad \Rightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{1}{A}(u_{in} - u_{ut})}$$

a) Tank 1: $\dot{x}_1 = u - K(x_1 - x_2)$

Tank 2: $\dot{x}_2 = K(x_1 - x_2) - K(x_2 - x_3)$

Tank 3: $\dot{x}_3 = K(x_2 - x_3) - Kx_3$

I vårt fall gäller att $A = 1$

På matrisform fås

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -K & K & 0 \\ K & -2K & K \\ 0 & K & -2K \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot u \qquad \text{där } K = 0{,}005$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & K \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

---

b) I stationärtillståndet gäller att $\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = \dot{x}_3 = 0$.
Om vi sätter in $u = 0{,}5 \cdot 10^{-3}$ i tillståndsekvationen fås därför följande lineära ekv-system för bestämning av de stationära nivåerna:

$$\begin{bmatrix} -0{,}005 & 0{,}005 & 0 \\ 0{,}005 & -0{,}010 & 0{,}005 \\ 0 & 0{,}005 & -0{,}010 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}5 \cdot 10^{-3} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Lösning av ekvationssystemet ger

$$\begin{cases} x_1 = 0{,}3 \\ x_2 = 0{,}2 \\ x_3 = 0{,}1 \end{cases}$$

14.10 Nivåbalans ger

$$\frac{dV}{dt} = u_{in} - u_{ut} \quad \Rightarrow \quad A\frac{dh}{dt} = u_1 + u_2 - u_3$$

$$\Rightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{1}{A}(u_1 + u_2 - u_3)$$

Energibalans ger

$$\frac{dE}{dt} = P_{in} - P_{ut} \qquad \text{där} \begin{cases} P_{in} = u_1 \rho c T_1 + u_2 \rho c T_2 \\ P_{ut} = u_3 \rho c T \\ E = VT\rho c = AhT\rho c \end{cases}$$

dvs $$\frac{dE}{dt} = \frac{d(AhT\rho c)}{dt} = A\rho c \frac{d(hT)}{dt} = A\rho c[h'T + hT']$$

Konstanter bryts ur derivatan

Enligt formel för derivatan av en produkt

Vi får alltså

$$A\rho c[h'T + hT'] = u_1 \rho c T_1 + u_2 \rho c T_2 - u_3 \rho c T$$

Förenkling

$$A[h'T + hT'] = u_1 T_1 + u_2 T_2 - u_3 T$$

$$\Rightarrow hT' = \frac{u_1 T_1 + u_2 T_2 - u_3 T}{A} - h'T = \frac{u_1 T_1 + u_2 T_2 - u_3 T - T(u_1 + u_2 - u_3)}{A}$$

$$\Rightarrow \frac{dT}{dt} = \frac{u_1(T_1 - T) + u_2(T_2 - T)}{Ah}$$

Tillstånds-modellen blir

$$\begin{cases} \dfrac{dh}{dt} = \dfrac{1}{A}(u_1 + u_2 - u_3) & (1) \\ \dfrac{dT}{dt} = \dfrac{1}{Ah}\left[u_1(T_1 - T) + u_2(T_2 - T)\right] & (2) \end{cases}$$

Modellen är olineär pga produkter och kvoter av variabler i ekvation (2)

14.13 Energibalans för de två rummen ger

$$\begin{cases} \dfrac{dE_1}{dt} = Q\rho c T_{in} - Q\rho c T_1 - k_{10}(T_1 - T_0) - k_{12}(T_1 - T_2) + P \\ \dfrac{dE_2}{dt} = Q\rho c T_1 - Q\rho c T_2 + k_{12}(T_1 - T_2) - k_{20}(T_2 - T_0) \end{cases}$$

Här gäller att:

$$\begin{cases} E_1 = C_1 T_1 \\ E_2 = C_2 T_2 \\ T_{in} = T_0 + 0{,}75(T_2 - T_0) = 0{,}75\, T_2 + 0{,}25\, T_0 \end{cases}$$

Dvs

$$\frac{dT_1}{dt} = \frac{1}{C_1}\left[P + Q\rho c\,(0{,}75 \cdot T_2 + 0{,}25 \cdot T_0) - Q\rho c T_1 - k_{10}(T_1 - T_0) - k_{12}(T_1 - T_2)\right]$$

$$\frac{dT_2}{dt} = \frac{1}{C_2}\left[Q\rho c T_1 - Q\rho c T_2 + k_{12}(T_1 - T_2) - k_{20}(T_2 - T_0)\right]$$

På matrisform fås

$$\begin{bmatrix} \dot{T}_1 \\ \dot{T}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{-Q\rho c - k_{10} - k_{12}}{C_1} & \dfrac{0{,}75 Q\rho c + k_{12}}{C_1} \\ \dfrac{Q\rho c + k_{12}}{C_2} & \dfrac{-Q\rho c - k_{12} - k_{20}}{C_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{1}{C_1} & \dfrac{0{,}25 Q\rho c + k_{10}}{C_1} \\ 0 & \dfrac{k_{20}}{C_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P \\ T_0 \end{bmatrix}$$

Med siffror fås

$$\begin{bmatrix} \dot{T}_1 \\ \dot{T}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1{,}371 \cdot 10^{-4} & 1{,}097 \cdot 10^{-4} \\ 1{,}097 \cdot 10^{-4} & -1{,}371 \cdot 10^{-4} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \cdot 10^{-7} & 5{,}32 \cdot 10^{-5} \\ 0 & 5 \cdot 10^{-5} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P \\ T_0 \end{bmatrix}$$

$$T_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix}$$

14.15 Vid byte av tillståndsvariabler $\bar{x} = Tx$ gäller

$$\text{Ny} \begin{cases} \text{A-matris} & \tilde{A} = TAT^{-1} \\ \text{B-matris} & \tilde{B} = TB \\ \text{C-matris} & \tilde{C} = CT^{-1} \\ \text{D-matris} & \tilde{D} = D \end{cases}$$

I vårt fall har vi

$$\begin{bmatrix} T_m \\ T_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} \qquad \text{dvs } T = \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Vi får alltså

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0{,}3 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & -0{,}3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} =$$

$$= \begin{bmatrix} -0{,}05 & -0{,}05 \\ 0{,}5 & -0{,}5 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{0{,}5 + 0{,}5} \begin{bmatrix} 1 & -0{,}5 \\ 1 & 0{,}5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}1 & 0 \\ 0 & -0{,}5 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}1 & 0 \\ 0{,}1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}1 & 0{,}5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \ldots = \begin{bmatrix} 1 & 0{,}5 \end{bmatrix}$$

$$\text{dvs} \quad \begin{bmatrix} \dot{T}_m \\ \dot{T}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}1 & 0 \\ 0 & -0{,}5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_m \\ T_s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0{,}1 & 0{,}5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_U \\ P \end{bmatrix}$$

$$T_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0{,}5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_m \\ T_s \end{bmatrix}$$

16.1 a) Signalen är summan av tre förskjutna enhetspulser $P_e(k)$

$$f(k) = P_e(k-1) + P_e(k-2) + P_e(k-3)$$

$$\Rightarrow F(z) = 1 \cdot z^{-1} + 1 \cdot z^{-2} + 1 \cdot z^{-3} = z^{-1} + z^{-2} + z^{-3}$$

b) Signalen är en digital rampfunktion med lutningen 0,25

$$f(k) = 0{,}25 \cdot k \quad \text{för } k > 0$$

$$\Rightarrow F(z) = 0{,}25 \cdot \frac{z}{(z-1)^2}$$

c) En förskjuten enhetsramp

$$\begin{cases} f(k) = 0 & k < 2 \\ f(k) = k-2 & k > 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow F(z) = z^{-2} \cdot \frac{z}{(z-1)^2} = \frac{z^{-1}}{(z-1)^2}$$

16.3 $f(k) = 2\left[P_e(k-1) + P_e(k-4) + P_e(k-7) + \ldots\right]$

$$\Rightarrow F(z) = 2\left(z^{-1} + z^{-4} + z^{-7} + \ldots\right) = 2z^{-1}\left(1 + z^{-3} + z^{-6} + \ldots\right) =$$

$$= 2z^{-1}\left((z^{-3})^0 + (z^{-3})^1 + (z^{-3})^2 + (z^{-3})^3 + \ldots\right) = \left\{\begin{matrix}\text{Enligt formel} \\ \text{för oändlig} \\ \text{summa}\end{matrix}\right\}$$

$$= 2z^{-1} \cdot \frac{1}{1 - z^{-3}}$$

16.4 a) $y(k) = 0{,}5\, y(k-1) + 3\, u(k-1)$

Flytta över alla y-termer till vänster sida

$$y(k) - 0{,}5\, y(k-1) = 3\, u(k-1)$$

z-transformering ger

$$Y - 0{,}5\, Y z^{-1} = 3 U z^{-1}$$

$$Y(1 - 0{,}5 z^{-1}) = 3 U z^{-1}$$

$$\Rightarrow H(z) = \frac{Y}{U} = \frac{3z^{-1}}{1 - 0{,}5 z^{-1}}$$

---

b) Samma metod som ovan ger:

$$y(k) - 0{,}8\, y(k-1) - 0{,}2\, y(k-2) - 0{,}5\, y(k-3) = u(k-1) + 2\, u(k-2)$$

$$\Rightarrow Y - 0{,}8 Y z^{-1} - 0{,}2 Y z^{-2} - 0{,}5 Y z^{-3} = U z^{-1} + 2 U z^{-2}$$

$$\Rightarrow Y\left[1 - 0{,}8 z^{-1} - 0{,}2 z^{-2} - 0{,}5 z^{-3}\right] = U\left[z^{-1} + 2 z^{-2}\right]$$

$$\Rightarrow H(z) = \frac{z^{-1} + 2z^{-2}}{1 - 0{,}8 z^{-1} - 0{,}2 z^{-2} - 0{,}5 z^{-3}}$$

16.5 a) Här går vi motsatt håll jämfört när vi går från differensekvation till överföringsfunktion

$$H(z) = \frac{Y}{U} = \frac{z^{-1} + 2z^{-2}}{1 + 0{,}5z^{-1} + 0{,}2z^{-2}}$$

$$\Rightarrow Y(1 + 0{,}5z^{-1} + 0{,}2z^{-2}) = U(z^{-1} + 2z^{-2})$$

$$\Rightarrow y(k) + 0{,}5y(k-1) + 0{,}2y(k-2) = u(k-1) + 2u(k-2)$$

eller

$$y(k) = -0{,}5y(k-1) - 0{,}2y(k-2) + u(k-1) + 2u(k-2)$$

---

d) Här skriver vi först om till negativ representation

$$H(z) = \frac{3z^{-2} - z^{-3}}{1 + 0{,}1z^{-2} + z^{-3}} = \frac{Y}{U}$$

$$\Rightarrow Y(1 + 0{,}1z^{-2} + z^{-3}) = U(3z^{-2} - z^{-3})$$

Inverstransformering ger

$$y(k) + 0{,}1y(k-2) + y(k-3) = 3u(k-2) - u(k-3)$$

eller

$$y(k) = -0{,}1y(k-2) - y(k-3) + 3u(k-2) - u(k-3)$$

16.6 a) $y(k) = y(k-1) + 2u(k-1)$

$$\Rightarrow y(k) - y(k-1) = 2u(k-1)$$

z-transformera $\Rightarrow Y - Yz^{-1} = 2Uz^{-1} \quad \Rightarrow Y(1 - z^{-1}) = 2Uz^{-1}$

$$\Rightarrow H(z) = \frac{Y}{U} = \frac{2z^{-1}}{1 - z^{-1}}$$

Insignal: Stegfunktion, dvs $U(z) = \dfrac{1}{1 - z^{-1}}$

Utsignalens transform blir:

$$Y(z) = U(z) \cdot H(z) = \frac{2z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2}$$

Motsvarande tidsfunktion blir:

$$y(k) = 2k \quad \text{för } k > 0$$

(Detta är en rampfunktion – Processen är en tidsdiskret integrerande process)

---

b) $y(k) = 0{,}5y(k-1) + 2u(k-1)$

$$\Rightarrow Y - 0{,}5Yz^{-1} = 2Uz^{-1}$$

$$\Rightarrow H(z) = \frac{2z^{-1}}{1 - 0{,}5z^{-1}}$$

Utsignalens transform blir

$$Y(z) = U(z) \cdot H(z) = \frac{2z^{-1}}{(1 - z^{-1})(1 - 0{,}5z^{-1})}$$

Tabell över z-transformer ger att

TRANSFORM

TIDS FUNKTION

$$\frac{(1-e^{-a})z^{-1}}{(1-z^{-1})(1-e^{-a}z^{-1})} \Leftrightarrow 1-e^{-ak}$$

I vårt fall gäller:

$$e^{-a} = 0{,}5 \qquad \text{dvs} \quad (1-e^{-a}) = 0{,}5$$

Vi får sålunda

$$y(k) = 4\,(1-0{,}5^{k}) \quad \text{för } k \geq 0$$

16.8 a $\quad y(k) = 1{,}3\,y(k-1) - 0{,}5\,y(k-2) + u(k-1) + u(k-2)$

Den iterativa metoden ger:

	Insignal	y(k)				Utsignal
k	u(k)	u(k-1)	u(k-2)	-0,5 y(k-2)	1,3 y(k-1)	y(k)
0	1	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	1
2	1	1	1	0	1,3	3,3
3	1	1	1	-0,5	4,29	5,79
4	1	1	1	-1,65	7,527	7,877
5	1	1	1	-2,895	10,2401	9,345
6	1	1	1	-3,94	12,1486	10,209
7	1	1	1	-4,673	13,271	10,599
8	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

17.1 b) Enligt formelsamling gäller

$$\frac{K}{1+Ts} \Leftrightarrow \frac{K(1-e^{-h/T})}{z-e^{-h/T}}$$

Analog process

Motsv. tids-diskreta process

I vårt fall har vi $\begin{Bmatrix} h=2 \\ K=5 \\ T=1 \end{Bmatrix}$

$$\Rightarrow H(z) = \frac{Y}{U} = \frac{5(1-e^{-2})}{z-e^{-2}} = \frac{4{,}32}{z-1{,}35} =$$

$$= \frac{4{,}32\, z^{-1}}{1-0{,}135\, z^{-1}}$$

---

e) Formelsamling ger

$$\frac{K}{s^2} \Leftrightarrow \frac{Kh^2}{2}\,\frac{z^{-1}+z^{-2}}{1-2z^{-1}+z^{-2}}$$

I vårt fall har vi $\begin{Bmatrix} h=2 \\ K=10 \end{Bmatrix}$

$$\Rightarrow H(z) = \frac{Y}{U} = \frac{10\cdot 2^2}{2}\cdot\frac{z^{-1}+z^{-2}}{(1-2z^{-1}+z^{-2})} =$$

$$= 20\cdot\frac{z^{-1}+z^{-2}}{1-2z^{-1}+z^{-2}}$$

17.3 Tidsdiskret ö-funktion

$$H(z) = \frac{Y}{U} = \frac{2z^{-1}}{1-0{,}68\, z^{-1}}$$ Gäller då $h = 1$ s

Formelsamling ger

$$\frac{K(1-e^{-h/T})\, z^{-1}}{1-e^{-h/T} z^{-1}} \Leftrightarrow \frac{K}{1+Ts}$$

Tids diskret

Analog

Jämförelse ger

$$e^{-h/T} = e^{-1/T} = 0{,}68 \Rightarrow -\frac{1}{T} = \ln 0{,}68 \Rightarrow T = 2{,}59$$

$$K(1-e^{-h/T}) = 2 \Rightarrow K = \frac{2}{1-0{,}68} = 6{,}25$$

Vi får alltså

$$G(s) = \frac{Y}{U} = \frac{6{,}25}{1+2{,}59\, s}$$

Motsvarande differentialekv:

$$Y(1+2{,}59\, s) = 6{,}25\, U$$

$$\Rightarrow 2{,}59\, y' + y = 6{,}25\, u$$

17.5

① Gör om till en överföringsfunktion $H(z)$

$$Y(1-0{,}8465\,z^{-1}) = 0{,}7676\cdot U\cdot z^{-1}$$

$$\Rightarrow H(z) = \frac{Y}{U} = \frac{0{,}7676\,z^{-1}}{1-0{,}8465\,z^{-1}} \qquad h=2$$

② Bestäm motsvarande analoga ö-funktion $G(s)$

Tabell ger: $\dfrac{K}{1+Ts} \Leftrightarrow \dfrac{K(1-e^{-h/T})\,z^{-1}}{1-e^{-h/T}z^{-1}}$

dvs $e^{-2/T} = 0{,}8465 \Rightarrow -\dfrac{2}{T} = \ln 0{,}8465$

$$\Rightarrow T = -\frac{2}{\ln 0{,}8465} = 12$$

$$K(1-0{,}8465) = 0{,}7676 \Rightarrow K = 5$$

Analog process $G(s) = \dfrac{5}{1+12s}$

③ Ny diskretisering vid samplingsintervallet $h=1$

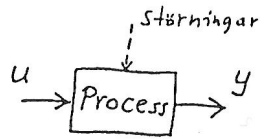
$$H(z) = \frac{5(1-e^{-1/12})\,z^{-1}}{1-e^{-1/12}z^{-1}} = \frac{0{,}40\,z^{-1}}{1-0{,}92\,z^{-1}}$$

④ Gör om till en differensekvation

$$\frac{Y}{U} = \frac{0{,}40\,z^{-1}}{1-0{,}92\,z^{-1}} \Rightarrow y(k) = 0{,}92\cdot y(k-1) + 0{,}4\cdot u(k-1)$$

Differensekvationen beskriver hur processen beter sig (vid samplingsögonblicken) om den styrs med en styckvis konstant insignal u

17.8



Antaget samband mellan u och y:

$$y(k) = b_1\cdot u(k-1) + b_2\cdot u(k-2)$$

Överbestämt ekvationssystem:

$$\begin{cases} y(4) = b_1\cdot u(3) + b_2\cdot u(2) \\ y(3) = b_1\cdot u(2) + b_2\cdot u(1) \\ y(2) = b_1\cdot u(1) + b_2\cdot u(0) \end{cases}$$

På matrisform, med insatta värden fås:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -7 \\ -2{,}4 \\ 3 \end{bmatrix}}_{\mathbb{y}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -4 & -2 \\ -2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}}_{\mathbb{A}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}}_{\mathbb{r}\ \text{(parametervektor)}}$$

Ekvationssystemet ska lösas i minsta kvadratmetodens mening, dvs.

$$\mathbb{r} = (\mathbb{A}^T\cdot\mathbb{A})^{-1}\cdot\mathbb{A}^T\mathbb{y}$$

Enligt linearа algebran fås:

$$\mathbb{A}^T\cdot\mathbb{A} = \begin{bmatrix} -4 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -4 & -2 \\ -2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 & 9 \\ 9 & 14 \end{bmatrix}$$

$$(\mathbb{A}^T\cdot\mathbb{A})^{-1} = \frac{1}{21\cdot 14 - 9^2}\begin{bmatrix} 14 & -9 \\ -9 & 21 \end{bmatrix} = \frac{1}{213}\begin{bmatrix} 14 & -9 \\ -9 & 21 \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{A}^T \mathbb{y} = \begin{bmatrix} -4 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -7 \\ -2{,}4 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 35{,}8 \\ 20{,}6 \end{bmatrix}$$

dvs. vi får

$$\mathbb{r} = (\mathbb{A}^T\mathbb{A})^{-1} \cdot \mathbb{A}^T \mathbb{y} = \frac{1}{213} \begin{bmatrix} 14 & -9 \\ -9 & 21 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 35{,}8 \\ 20{,}6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}483 \\ 0{,}518 \end{bmatrix}$$

dvs. differenskvationen blir

$$y(k) = 1{,}483 \cdot u(k-1) + 0{,}518 \cdot u(k-2)$$

Motsvarande överföringsfunktion är

$$H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = 1{,}483 \cdot z^{-1} + 0{,}518 \cdot z^{-2}$$

18.1 a) Vid blockschemaförenklingar gäller samma formler som i analoga fallet

$$H_{tot} = \frac{Y}{R} = \frac{\frac{z}{(z-1)} \cdot \frac{2z+1}{z^2-0{,}8z+0{,}5}}{1 + \frac{z}{(z-1)} \cdot \frac{2z+1}{z^2-0{,}8z+0{,}5}} =$$

$$= \frac{z(2z+1)}{(z-1)(z^2-0{,}8z+0{,}5) + z(2z+1)} =$$

$$= \frac{2z^2+z}{z^3+0{,}2z^2+2{,}3z-0{,}5}$$

18.3

$$H(z) = \frac{3{,}5}{z-0{,}8}$$

$\boxed{\text{Byt alla } z \text{ mot } e^{j\omega h} \text{ där } h=1 \text{ för att få frekvensfunktionen}}$

$$\Rightarrow H(j\omega) = \frac{3{,}5}{e^{j\omega}-0{,}8} = \frac{3{,}5}{\cos\omega + j\sin\omega - 0{,}8}$$

$$\Rightarrow A(\omega) = |H(j\omega)| = \frac{3{,}5}{\sqrt{(\cos\omega-0{,}8)^2+\sin^2\omega}} =$$

$$= \frac{3{,}5}{\sqrt{\cos^2\omega - 1{,}6\cos\omega + 0{,}64 + \sin^2\omega}} = \frac{3{,}5}{\sqrt{1{,}64-1{,}6\cos\omega}}$$

$$\varphi(\omega) = -\arctan\left(\frac{\sin\omega}{\cos\omega-0{,}8}\right)$$

18.4 a) Lågfrekvensförstärkningen fås genom att byta alla z mot 1 i överförings-funktionen:

$$K_{LF} = H(1) = \frac{3+1}{1-1{,}6+0{,}63} = \frac{4}{0{,}03} = 133{,}3$$

---

b) $$K_{LF} = H(1) = \frac{3+1}{1-2{,}4+1{,}92-0{,}512} = \frac{4}{0{,}008} = 500$$

18.6 c) $$H(z) = \frac{3z+1}{z^2-1{,}6z+0{,}63}$$

Använd polbestämning!

Kar. ekv $z^2-1{,}6z+0{,}63=0$

$$\Rightarrow z = 0{,}8 \pm \sqrt{0{,}8^2-0{,}63} = 0{,}8 \pm 0{,}1$$

$$\begin{cases} z_1 = 0{,}7 \\ z_2 = 0{,}9 \end{cases}$$

STABILT

Båda poler i hom enhetscirkeln

---

e) Kar. ekv $z^2-1{,}4z+0{,}4=0$

$$\Rightarrow z = 0{,}7 \pm \sqrt{0{,}7^2-0{,}4} = 0{,}7 \pm \sqrt{0{,}09} =$$

$$= 0{,}7 \pm 0{,}3 \quad \begin{cases} z_1 = 0{,}4 \\ z_2 = 1{,}0 \end{cases}$$

På stabilitets-gränsen

(En pol på enhetscirkeln

18.7 a) Total överföringsfunktion blir:

$$H_{tot} = \frac{\dfrac{2Kz^{-1}}{1-z^{-1}}}{1+\dfrac{2Kz^{-1}}{1-z^{-1}}} = \frac{2Kz^{-1}}{1-z^{-1}+2Kz^{-1}} =$$

$$= \frac{2Kz^{-1}}{1+(2K-1)z^{-1}}$$

Kar. ekv $1+(2K-1)z^{-1}=0$

$$\Rightarrow z+(2K-1)=0$$

$$\Rightarrow z = 1-2K$$

Stab. villkor $1-2K>-1 \Rightarrow 2K<2$

$$\Rightarrow \boxed{K<1}$$

---

b) $$H_{tot} = \frac{\dfrac{K}{(z-1)(z-0{,}5)}}{1+\dfrac{K}{(z-1)(z-0{,}5)}} = \frac{K}{(z-1)(z-0{,}5)+K} =$$

$$= \frac{K}{z^2-1{,}5z+(0{,}5+K)}$$

Kar. ekv $z^2-1{,}5z+(0{,}5+K)=0$

$$\Rightarrow z = 0{,}75 \pm \sqrt{0{,}5625-K-0{,}5} =$$

$$= 0{,}75 \pm \sqrt{0{,}0625-K}$$

Vi får skilja på 2 fall:

<u>Fall 1</u> Om $0 < K < 0{,}0625$

I detta fall har vi reella poler (positivt under roten)

Eftersom $\sqrt{0{,}0625} = 0{,}25$ gäller att

polen kan skrivas

$z = 0{,}75 \pm p$ där $p < 0{,}25$

Dvs. Båda poler ligger inom enhetscirkeln.

(Inget problem med instabilitet i detta fall)

<u>Fall 2</u> Om $K > 0{,}0625$

I detta fall har vi komplexa poler (negativt under roten)

Vi får

$$z = 0{,}75 \pm \sqrt{\underbrace{0{,}0625 - K}_{\text{negativt tal}}} = 0{,}75 \pm \sqrt{-1\,(K - 0{,}0625)} =$$

$$= 0{,}75 \pm j\sqrt{K - 0{,}0625}$$

Vilket ger: $|z| = \sqrt{0{,}75^2 + (K - 0{,}0625)} =$

$$= \sqrt{0{,}5625 + K - 0{,}0625} = \sqrt{0{,}5 + K}$$

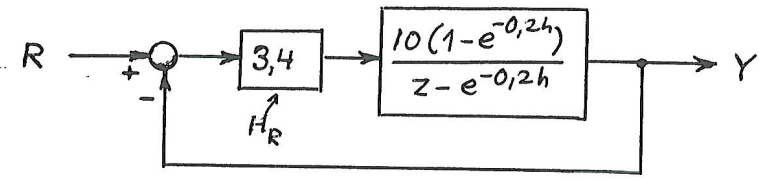
Stabilitetsvillkor $|z| < 1$

$$\Rightarrow \quad 0{,}5 + K < 1 \quad \Rightarrow \quad K < 0{,}5$$

<u>Svar:</u> $K < 0{,}5$

<u>18.9 b</u> $G(s) = \dfrac{10}{1+5s} = \dfrac{2}{1+0{,}2s}$

Diskretisering ger $H(z) = \dfrac{10\,(1 - e^{-0{,}2h})}{z - e^{-0{,}2h}}$

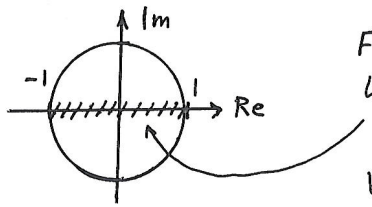


Total överföringsfunktion

$$H_{tot} = \frac{H_R H}{1 + H_R H} = \ldots = \frac{34\,(1 - e^{-0{,}2h})}{z - e^{-0{,}2h} + 34\,(1 - e^{-0{,}2h})}$$

Kar. ekv $\Rightarrow$ $z + 34 - 35\,e^{-0{,}2h} = 0$

Pol $\Rightarrow$ $z = 35\,e^{-0{,}2h} - 34$ (reell pol)



För stabilitet måste polen ligga inom enhetscirkeln.

Villkor: $35\,e^{-0{,}2h} - 34 > -1$

$$\Rightarrow \quad 35\,e^{-0{,}2h} > 33$$

$$\Rightarrow \quad e^{-0{,}2h} > \frac{33}{35}$$

$$\Rightarrow \quad -0{,}2h > \ln\left(\frac{33}{35}\right)$$

$$\Rightarrow \quad h < -5 \cdot \ln\left(\frac{33}{35}\right) = 0{,}294$$

<u>Svar:</u> $\max(h) = 0{,}294$

19.1 $G(s) = \frac{3}{s}$

a) Euler-transformen: Byt s mot $s = \frac{z-1}{zh}$

$$\Rightarrow \quad H(z) = \frac{3z}{z-1}$$

b) Bilineär transform: Byt s mot $s = \frac{2(z-1)}{h(z+1)}$

$$\Rightarrow \quad H(z) = \frac{3(z+1)}{2(z-1)}$$

19.2 $G(s) = \frac{1+2s}{1+5s}$

a) Eulertransformen $s = \frac{z-1}{zh}$

$$\Rightarrow \quad H(z) = \frac{1 + 2\left(\frac{z-1}{zh}\right)}{1 + 5\left(\frac{z-1}{zh}\right)} = \frac{zh + 2(z-1)}{zh + 5(z-1)} = \frac{z(2+h) - 2}{z(5+h) - 5}$$

$h = 0{,}1$ ger $\Rightarrow \quad H(z) = \frac{2{,}1z - 2}{5{,}1z - 5}$

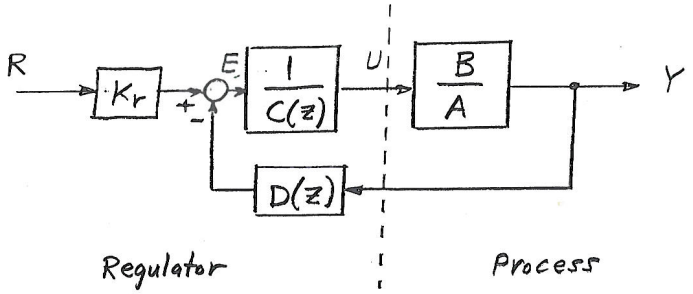
b) Bilineär transform $s = \frac{2(z-1)}{h(z+1)}$

$$\Rightarrow \quad H(z) = \frac{1 + \frac{4(z-1)}{h(z+1)}}{1 + \frac{10(z-1)}{h(z+1)}} = \frac{h(z+1) + 4(z-1)}{h(z+1) + 10(z-1)} =$$

$$= \frac{z(4+h) + (h-4)}{z(10+h) + (h-10)}$$

$h = 0{,}1$ ger $\Rightarrow \quad H(z) = \frac{4{,}1z - 3{,}9}{10{,}1z - 9{,}9}$

19.5 Process $H(z) = \frac{B}{A} = \frac{0{,}65\, z^{-1} + 0{,}35\, z^{-2}}{1 - 0{,}75\, z^{-1}}$



Arbetsmetodiken (kap 18) ger:

① $\begin{cases} n_p = n_a + n_b - 1 = 1 + 2 - 1 = 2 \\ n_c = n_b - 1 = 2 - 1 = 1 \\ n_d = n_a - 1 = 1 - 1 = 0 \end{cases}$

Vi ska alltså ha följande "utseende" på C- och D-polynomen

$\begin{cases} C(z) = 1 + c_1 z^{-1} & \text{(grad 1)} \\ D(z) = d_0 & \text{(grad 0)} \end{cases}$

② Det önskade karakteristiska polynomet blir:

$P(z) = (1 - p_1 z^{-1})(1 - p_2 z^{-1}) =$

$= (1 - 0{,}5\, z^{-1})^2 = 1 - z^{-1} + 0{,}25\, z^{-2}$

Skrives direkt i negativ representation

③ Polplaceringsekvationen $AC + BD = P$

$(1 - 0{,}75\, z^{-1})(1 + c_1 z^{-1}) + (0{,}65\, z^{-1} + 0{,}35\, z^{-2}) d_0 =$

$= 1 - z^{-1} + 0{,}25\, z^{-2}$

Hopmultiplicering + Sammanföring av termer med samma gradtal ger:

$1 + (c_1 - 0{,}75 + 0{,}65\, d_0) z^{-1} + (0{,}35\, d_0 - 0{,}75\, c_1) z^{-2} =$

$= 1 - z^{-1} + 0{,}25\, z^{-2}$

Vi får följande ekvationssystem

$\begin{cases} c_1 - 0{,}75 + 0{,}65\, d_0 = -1 \\ 0{,}35\, d_0 - 0{,}75\, c_1 = 0{,}25 \end{cases}$

Ekvationssystemet har lösningen

$\begin{cases} c_1 = -0{,}2985 \\ d_0 = 0{,}07463 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} C(z) = 1 - 0{,}2985\, z^{-1} \\ D(z) = 0{,}07463 \end{array}$

④ Börvärdesfaktorn K_r

$K_r = \frac{P(1)}{B(1)} = \frac{1 - 1 + 0{,}25}{0{,}65 + 0{,}35} = 0{,}25$

---

b) Ur blockschemat ser vi

$e(k) = 0{,}25 \cdot r(k) - 0{,}07463\, y(k)$ (1)

$\frac{U}{E} = \frac{1}{C} = \frac{1}{1 - 0{,}2985\, z^{-1}} \Rightarrow U(1 - 0{,}2985\, z^{-1}) = E$

dvs $u(k) = e(k) + 0{,}2985\, u(k)$ (2)

$\boxed{\text{Regulatorn kan alltså implementeras mha de två differensekvationerna (1)+(2) i någon dator}}$

19.6 $y(k) = 0{,}6\, y(k-1) + 0{,}3\, u(k-1) + 0{,}7\, u(k-2)$

Omskrivning till ö-funktion ger:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{0{,}3\, z^{-1} + 0{,}7 \cdot z^{-2}}{1 - 0{,}6 \cdot z^{-1}}$$

← B-polynom (grad 2)

← A-polynom (grad 1)

Arbetsmetodiken i läroboken ger nu:

① Gradtal

$$\begin{cases} n_p = 2+1-1 = 2 \\ n_c = 2-1 = 1 \\ n_D = 1-1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C(z) = 1 + C_1 \cdot z^{-1} \\ D(z) = d_0 \end{cases}$$

TVÅ PARAMETRAR ATT BESTÄMMA ! C_1 OCH d_0

② Önskat kar. polynom (i negativ representation)

$$P(z) = (1 - 0{,}3\, z^{-1})(1 - 0{,}3\, z^{-1}) = 1 - 0{,}6\, z^{-1} + 0{,}09\, z^{-2}$$

③ Polplaceringsekvationen blir

$$AC + BD = (1 - 0{,}6\, z^{-1})(1 + C_1 z^{-1}) + (0{,}3\, z^{-1} + 0{,}7 \cdot z^{-2})\, d_0 =$$
$$= 1 - 0{,}6\, z^{-1} + 0{,}09\, z^{-2}$$

Hopmultiplicering av vänsterledet + sammanföring av termer med samma gradtal ger:

$$1 + (C_1 - 0{,}6 + 0{,}3\, d_0)\, z^{-1} + (0{,}7\, d_0 - 0{,}6\, C_1)\, z^{-2} = 1 - 0{,}6\, z^{-1} + 0{,}09 \cdot z^{-2}$$

Vi får ekvationssystemet:

$$\begin{cases} C_1 - 0{,}6 + 0{,}3\, d_0 = -0{,}6 \\ 0{,}7\, d_0 - 0{,}6\, C_1 = 0{,}09 \end{cases} \Rightarrow$$

LÖSNING AV EKV. SYSTEMET GER:

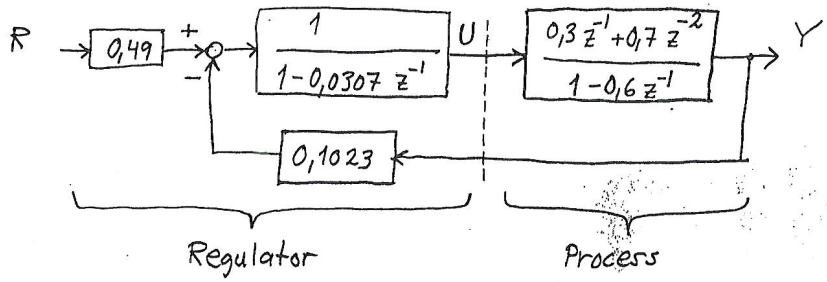
$$\begin{cases} C_1 = -0{,}0307 \\ d_0 = 0{,}1023 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C(z) = 1 - 0{,}0307 \cdot z^{-1} \\ D(z) = 0{,}1023 \end{cases}$$

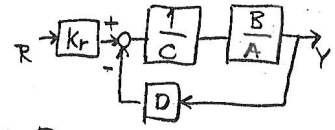
④ Börvärdesfaktorn blir:

$$K_r = \frac{P(1)}{B(1)} = \frac{1 - 0{,}6 + 0{,}09}{0{,}3 + 0{,}7} = \frac{0{,}49}{1} = 0{,}49$$

Utseende på reglersystemet:



Total överföringsfunktion från R till Y



$$H_{tot} = \frac{K_r \cdot \frac{B}{C \cdot A}}{1 + \frac{BD}{C \cdot A}} = \frac{K_r \cdot B}{A \cdot C + B \cdot D} = \frac{K_r \cdot B}{P}$$

Insättning av K_r, B och P ger:

$$H_{tot} = \frac{0{,}49\,(0{,}3\, z^{-1} + 0{,}7\, z^{-2})}{1 - 0{,}6\, z^{-1} + 0{,}09\, z^{-2}}$$

19.9 Ledtrådar för att komma igång

1) Bestäm approximativ analog ö-funktion till processen:

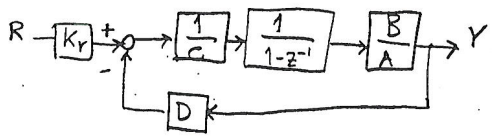
$$G(s) \approx \frac{3 \cdot e^{-s}}{1+2s}$$

2) Diskretisera vid sampl. intervallet $h=1$ s.

$$e^{-s} \leftrightarrow z^{-1} \qquad \frac{3}{1+2s} \leftrightarrow \frac{1{,}18 \cdot z^{-1}}{1-0{,}61\, z^{-1}}$$

$$\Rightarrow H(z) = \frac{1{,}18 \cdot z^{-2}}{1-0{,}61\, z^{-1}} \quad \begin{matrix} \leftarrow \text{B-polynom} \\ \leftarrow \text{A-polynom} \end{matrix}$$

3) Polplaceringsregulator med integralverkan krävs pga. kravet $e_v = 0$.



$B = 1{,}18\, z^{-2}$

$A' = (1-0{,}61\, z^{-1})(1-z^{-1}) =$

$= 1 - 1{,}61 \cdot z^{-1} + 0{,}61 \cdot z^{-2}$

$$\begin{cases} n_c = n_b - 1 = 2-1 = 1 \\ n_D = n_{a'} - 1 = 2-1 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} C = 1 + c_1 z^{-1} \\ D = d_0 + d_1 z^{-1} \end{cases}$$

4) Poler i origo $\Rightarrow$ $P(z) = (1-0 \cdot z^{-1})^3 = 1$

$n_p = n_a + n_b - 1 = 3$

5) Polplaceringsekvationen blir

$$A'C + BD = (1 - 1{,}61 \cdot z^{-1} + 0{,}61 \cdot z^{-2})(1 + c_1 z^{-1}) + $$
$$+ 1{,}18\, z^{-1}(d_0 + d_1 z^{-1}) = 1$$

Fortsättningen av talet löses enligt arbetsmetodiken i faktaboken, på samma sätt som andra polplaceringstal...

19.13 Total överföringsfunktion

$$G_{TOT} = \frac{G_R G_P}{1 + G_R G_P} = \frac{K\left(\frac{1+Ts}{Ts}\right) \cdot \frac{3}{1+2s}}{1 + \frac{K(1+Ts)}{Ts} \cdot \frac{3}{1+2s}} =$$

$$= \frac{3K(1+Ts)}{Ts(1+2s) + 3K(1+Ts)} = \frac{3K + 3KTs}{2Ts^2 + T(3K+1)s + 3K} \Rightarrow$$

Önskad kar. ekv: $\text{konst} \cdot (s+1)(s+1) =$

$= \text{konst} \cdot (s^2 + 2s + 1)$

För att få likhet väljer vi konstanten till 3K och får

$$3Ks^2 + 6Ks + 3K = 2Ts^2 + T(3K+1)s + 3K$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3K = 2T & (1) \\ 6K = T(3K+1) & (2) \end{cases}$$

(1) $\Rightarrow$ $T = 1{,}5K$

(2) $\Rightarrow$ $6K = 1{,}5K(3K+1) \Rightarrow 4{,}5K^2 - 6K + 1{,}5K = 0$

$\Rightarrow K(4{,}5K - 4{,}5) = 0 \quad \Rightarrow \quad K = 1$

$T = 1{,}5$

<u>Svar</u>: Välj $\begin{cases} T = 1{,}5 \\ K = 1 \end{cases}$