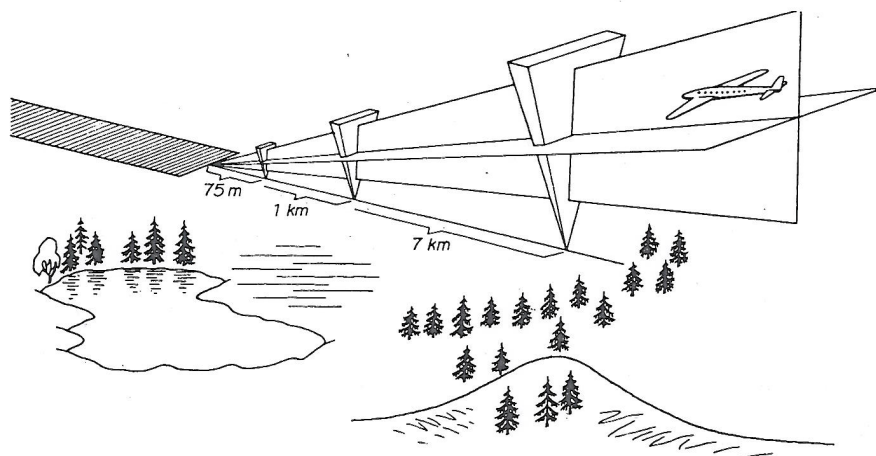
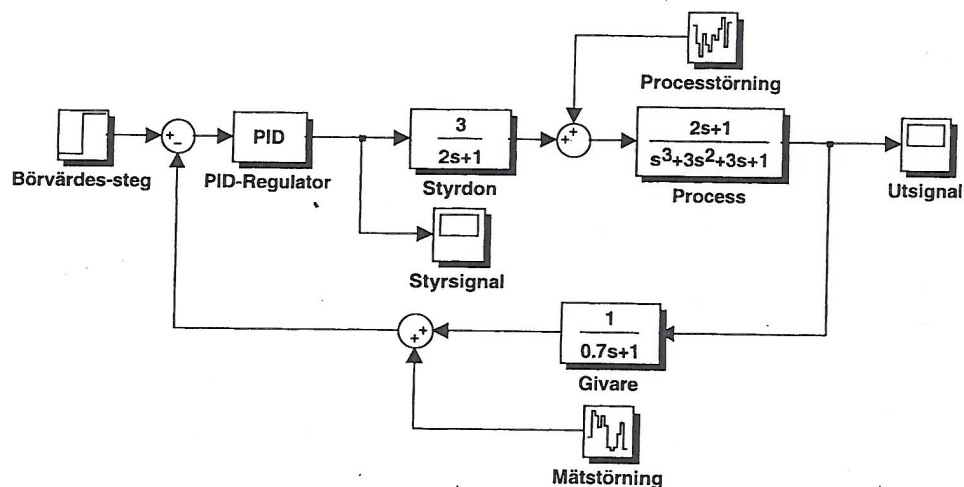
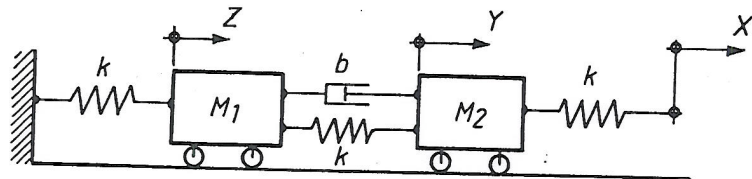


LÖSNINGAR – ETT URVAL

Modern Reglerteknik Bertil Thomas



Lösningar – Ett urval

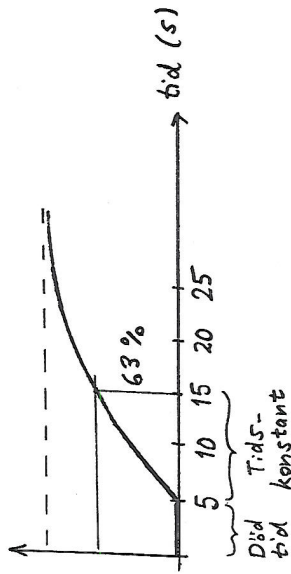
Detta häfte innehåller fullständiga lösningar till ca 100 av uppgifterna i övningsboken till Modern reglerteknik. Inte alla – men tillräckligt många för att kunna lösa övriga uppgifter utan större problem.

Häftet ska ses som ett hjälpmedel för den som studerar och försöker lösa problem.

Lösta uppgifter i detta häfte

1		6	1, 3, 5d-e, 6d, 7d, 8a,c,e, 9b, 11, 13, 14b	11	2, 3, 6, 9, 11, 12, 15, 16, 17	16	1a-c, 3, 4a-b, 5a,d, 6a-b, 8a,
2		7	1b, 2, 4, 7, 9, 12, 15, 17a-c, 19	12	4, 6, 8, 10, 11	17	1b,e, 3, 5, 8
3	4, 6a	8	2, 3, 4, 5, 7, 10	13		18	1a, 3a, 4a- b, 6c,e, 7a- b, 9b
4	4, 6	9	1, 4, 5, 8e, 10, 11	14	1, 3, 4, 6a, 7, 8, 10, 13, 15	19	1, 2, 5, 9, 6 13
5		10	1, 3, 4, 8, 9, 10, 11a, 15, 16, 21, 22, 24, 25	15		20	

3.4



4.4

$$u = 120 + 2,5e + 3e'$$

a) $u = 120$

b) $u = 120 + 3 \cdot 2 = 126$

c) $u = 120 + 3(-2) = 114$

d) $u = 120 + 2,5 \cdot 5 + 3 \cdot 2 = 138,5$

3.6 a En process med en tidskonstant

har stegsvaret

$y(t) = K(1 - e^{-t/T})$, där T är tidskonstanten

och K är slutvärdet.

Vi vet att $y(12) = 0,5 \cdot K$, dvs

$$(1 - e^{-12/T}) = 0,5$$

$$\Rightarrow e^{-12/T} = 0,5$$

$$\Rightarrow -\frac{12}{T} = \ln 0,5$$

$$\Rightarrow T = \frac{-12}{\ln 0,5} = 17,3$$

3.6 b På samma sätt som ovan fås

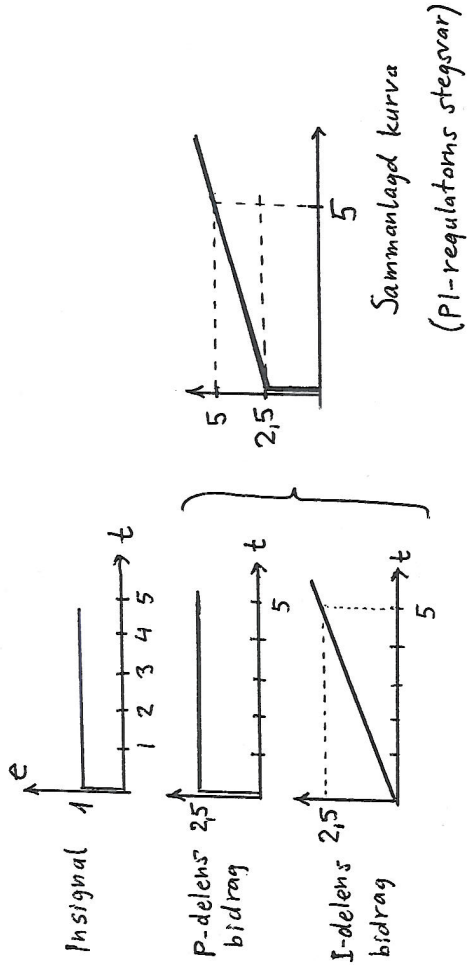
$$y(10) = K(1 - e^{-10/T}) = 0,9 K$$

$$\Rightarrow e^{-10/T} = 0,1$$

$$\Rightarrow -\frac{10}{T} = \ln 0,1 \Rightarrow T = \frac{-10}{\ln 0,1} = 4,34 \text{ min}$$

4.6
$$u(t) = K \left(e + \frac{1}{T_I} \int_0^t e \, dt \right) = 2,5 \left(e + \frac{1}{5} \int_0^t e \, dt \right) =$$

$$= 2,5 e + 0,5 \int_0^t e \, dt$$



6.1 a)
$$F(s) = \int_0^\infty e^{-at} \cdot e^{-st} \, dt = \int_0^\infty e^{-(a+s)t} \, dt =$$

$$= \left[-\frac{e^{-(a+s)t}}{a+s} \right]_0^\infty = 0 - -\frac{1}{a+s} = \frac{1}{a+s}$$

b) Signalen kan ses som summan av två steg-funktioner, en vid tiden T och en (negativ) vid $T+1$. Det ger

$$f(t) = \sigma(t-T) - \sigma(t-(T+1))$$

$$\Rightarrow F(s) = \frac{1}{s} \cdot e^{-Ts} - \frac{1}{s} \cdot e^{-(T+1)s} = \frac{e^{-Ts} - e^{-(T+1)s}}{s}$$

c) Fördörjningsratten ger

$$F(s) = e^{-2s} \cdot \frac{1}{s^2} = \frac{e^{-2s}}{s^2}$$

Fördörjning Rampfunktion

e) Signalen är summan av två rampfunktioner, en vid tiden $t=0$ och en (negativ) vid tiden $t=1$. Det ger

$$F(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2} \cdot e^{-s} = \frac{1-e^{-s}}{s^2}$$

6.3

En enda triangelimpuls kan skrivas:

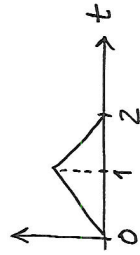
$$f(t) = g(t) - 2g(t-1) + g(t-2)$$

vilket ger:

$$F(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{2e^{-s}}{s^2} + \frac{e^{-2s}}{s^2} = \frac{(1-e^{-s})^2}{s^2}$$

För en oändlig sågtalesfunktion fås:

$$\begin{aligned} \bar{F}(s) &= \frac{(1-e^{-s})^2}{s^2} \cdot (1 + e^{-2s} + e^{-4s} + e^{-6s} + \dots) = \\ &= \frac{(1-e^{-s})^2}{s^2} \cdot [(e^{-2s})^0 + (e^{-2s})^1 + (e^{-2s})^2 + \dots] = \\ &= \frac{(1-e^{-s})^2}{s^2} \cdot \frac{1}{1-e^{-2s}} = \frac{(1-e^{-s})^2}{s^2(1-e^{-2s})} \end{aligned}$$



6.5 d) $y'' - 3y' + 2y = 3x' + x$

Laplace-transformering ger:

(OBS! Alla begynnelseförhållanden sätts till 0 i enlighet med definitionen på överföringsfunktioner)

$$Ys^2 - 3Ys + 2Y = 3Xs + X$$

$$\Rightarrow Y(s^2 - 3s + 2) = X(3s + 1)$$

$$\Rightarrow G(s) = \frac{Y}{X} = \frac{3s+1}{s^2-3s+2}$$

$$\text{e) } \ddot{y} + 3\dot{y} + 2y = \dot{x} - 3x$$

$$\Rightarrow Ys^2 + 3Ys + 2Y = Xs - 3X$$

$$\Rightarrow Y(s^2 + 3s + 2) = X(s - 3)$$

$$\Rightarrow G(s) = \frac{s-3}{s^2+3s+2}$$

6.6 a) $y = x + 5 \int x \, dt + 2\dot{x}$

$$\Rightarrow Y = X + 5 \cdot \frac{X}{s} + 2Xs$$

$$\Rightarrow Y = X \left(1 + \frac{5}{s} + 2s \right)$$

$$\Rightarrow G(s) = 1 + \frac{5}{s} + 2s = \frac{2s^2 + s + 5}{s}$$

6.6 d $y' + y = 2x(t-10)$
 $\Rightarrow Ys + Y = 2X \cdot e^{-10s}$ (enligt fördröjningsrätten)
 $\Rightarrow Y(s+1) = 2X e^{-10s}$
 $\Rightarrow G(s) = \frac{Y}{X} = \frac{2e^{-10s}}{1+s}$

6.7 d $G(s) = \frac{Y}{U} = \frac{s+4}{2s^2+3}$

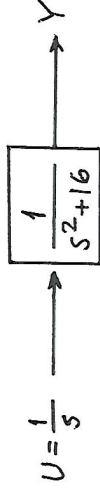
Inverstransformering ger:

$$Y(2s^2+3) = U(s+4)$$

$$\Rightarrow 2Ys^2 + 3Y = Us + 4U$$

$$\Rightarrow 2y'' + 3y = u' + 4u$$

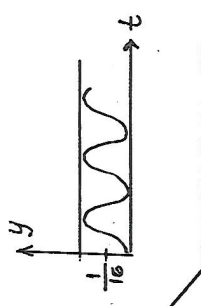
6.8 a Stegsvaret = svaret på stegformad.
 insignal $\Rightarrow$ insignalen är ett steg, $U = \frac{1}{s}$.



Utsignalens transform $Y = U \cdot G = \frac{1}{s(s^2+16)}$

Laplace-transform-tabell ger nu (sätt $a=4$)

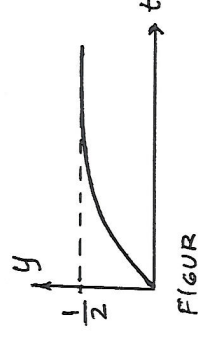
$$y = \frac{1}{16} (1 - \cos 4t) \quad t > 0$$



6.8 c Med samma metod som
 ovan fås:

$$Y = \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{(s+2)} = \frac{1}{s(s+2)} = \frac{1}{(s+0)(s+2)}$$

Tabell ger: $y = \frac{e^{-0t} - e^{-2t}}{2-0} = 0,5(1 - e^{-2t}) \quad t > 0$
 $\left\{ \begin{array}{l} \text{sätt } a=0 \\ b=2 \end{array} \right\}$



6.8 e

Utsignalens transform blir

$$Y = U \cdot G = \frac{1}{s^2(s+1)}$$

Detta uttryck finns inte i tabellen.

Vi måste partialbråksuppdelna:

$$Y = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s(s+1)}$$

Partialbråks
uppdelning
ger:

Inverstransformering ger nu

$$y(t) = t - (1 - e^{-t}) \quad t > 0$$

6.9 b

Impulssvaret = svaret på impulsformad

insignal $\Rightarrow$ insignalen är en impulsfunktion $U=1$

$$Y = U \cdot G = \frac{1+s}{s^2+4} = \frac{1}{s^2+4} + \frac{s}{s^2+4}$$

Inverstransformering med tabell ger: ($a=2$)

$$y(t) = \frac{1}{2} \sinh(2t) + \cos(2t)$$

6.11

$$2\ddot{y} + \dot{y} = u$$

$$\Rightarrow 2Ys^2 + Ys = U \Rightarrow Y(2s^2 + s) = U$$

$$\Rightarrow G(s) = \frac{1}{s(2s+1)}$$



$$Y(s) = U(s) \cdot G(s)$$

$$Y(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s(2s+1)} = \frac{1}{s^2(2s+1)} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Partialbråks} \\ \text{uppdelning} \end{array} \right\}$$

$$= \frac{1}{s^2} - \frac{2}{s(2s+1)}$$

Tabell ger:

$$y(t) = t - 2(1 - e^{-0.5t})$$

6.13

$$G(s) = \frac{2}{s^2 + 0,96s + 2}$$

Jämför med standarduttrycket $G = \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2}$

$$V_i \text{ får } \omega_0^2 = 2 \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{2}$$

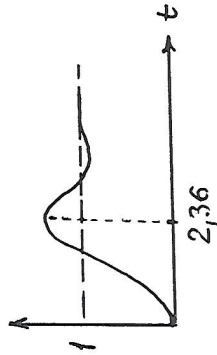
$$2\zeta\omega_0 = 0,96 \Rightarrow \zeta = \frac{0,96}{2\omega_0} = \frac{0,96}{2\sqrt{2}} = 0,34$$

Bokens formler ger nu (avsnitt 6.4):

$$\text{Max översväng } M_p = 100 \cdot \exp \frac{-0,34 \cdot \pi}{\sqrt{1-0,34^2}} = 32\%$$

Tid för max
översväng

$$t_p = \frac{\pi}{\sqrt{2} \sqrt{1-0,34^2}} = 2,36$$



6.14 b

$$y''' + 6y'' + 11y' + 6y = u' + 4u$$

$$\Rightarrow Ys^3 + 6Ys^2 + 11Ys + 6Y = Us + 4U$$

$$\Rightarrow Y(s^3 + 6s^2 + 11s + 6) = U(s + 4)$$

$$\Rightarrow G = \frac{Y}{U} = \frac{s+4}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6} = \left\{ \begin{array}{l} \text{faktorisering} \\ \text{ger} \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{s+4}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

Poler = rötter till nämnaren = -1, -2 och -3

Nollställen = -4 - täljaren = -4

Statisk förstärkning

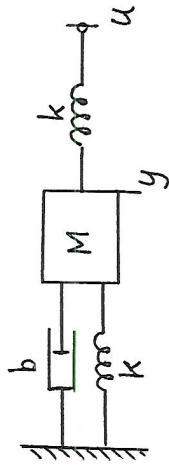
$$K_o = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Omskrivning
ger:

$$G(s) = \frac{(s+4)}{(1+s)(1+0,5s)(1+0,333s)} \cdot 6$$

Tidskonstanterna är $\left\{ \begin{array}{l} T_1 = 1 \\ T_2 = 0,5 \\ T_3 = 0,333 \end{array} \right.$

7.1 b)



Newtons andra lag för massan ger:

$$\Rightarrow \Sigma F = M \ddot{y}$$

$$k(u-y) - b\dot{y} = M \ddot{y}$$

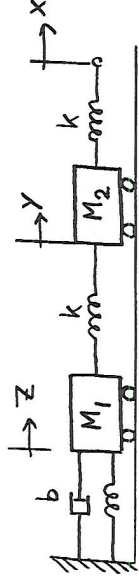
$$M \ddot{y} + b\dot{y} + ky = ku$$

Laplace transformering ger:

$$M Y s^2 + b Y s + 2k Y = k U$$

$$Y (M s^2 + b s + 2k) = k U$$

$$\Rightarrow G = \frac{Y}{U} = \frac{k}{M s^2 + b s + 2k}$$



7.2

Newtons andra lag ger:

$$\text{Massa } M_1: k(y-z) - k z - b \dot{z} = M_1 \ddot{z} \quad (1)$$

$$\text{Massa } M_2: k(x-y) - k(y-z) = M_2 \ddot{y} \quad (2)$$

Laplace transformering ger:

$$\begin{cases} k(Y-Z) - kZ - bZs = M_1 Z s^2 & (1) \\ k(X-Y) - k(Y-Z) = M_2 Y s^2 & (2) \end{cases}$$

Eliminering av mellanvariabeln Y ger

$$(2) \Rightarrow M_2 Y s^2 + 2kY = kX + kZ$$

$$Y(M_2 s^2 + 2k) = kX + kZ$$

$$Y = \frac{kX + kZ}{M_2 s^2 + 2k}$$

Insättning samt omflyttning av termer i ekv (1) ger:

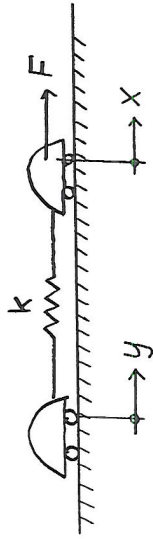
$$k \left[\frac{kX + kZ}{M_2 s^2 + 2k} \right] = M_1 Z s^2 + bZs + 2kZ$$

$$\Rightarrow k^2 X = (M_2 s^2 + 2k)(M_1 Z s^2 + bZs + 2kZ) - k^2 Z$$

$$\Rightarrow k^2 X = (M_1 M_2 s^4 + M_2 b s^3 + 2k(M_1 + M_2)s^2 + 2kbs + 3k^2) Z$$

$$\Rightarrow G(s) = \frac{Z}{X} = \frac{k^2}{M_1 M_2 s^4 + M_2 b s^3 + 2k(M_1 + M_2)s^2 + 2kbs + 3k^2}$$

7.4



Antag att
fjädern har
sin naturliga
längd då
 $x-y=0$

Bill 1 $F - k(x-y) - b\dot{x} = m_1 \ddot{x}$ (1)

Bill 2 $k(x-y) - b\dot{y} = m_2 \ddot{y}$ (2)

Laplace transformering ger

$$\begin{cases} \bar{F} - kX + kY - b s X = m_1 s^2 X & (1) \\ k(X-Y) - b s Y = m_2 s^2 Y & (2) \end{cases}$$

Eliminering av X ger

$$(1) \Rightarrow X(m_1 s^2 + b s + k) = \bar{F} + kY$$

$$\Rightarrow X = \frac{\bar{F} + kY}{m_1 s^2 + b s + k}$$

Insättning i ekv (2) ger:

$$(2) \Rightarrow \frac{k(\bar{F} + kY)}{m_1 s^2 + b s + k} = m_2 Y s^2 + b Y s + k Y$$

$$\Rightarrow k\bar{F} + k^2 Y = (m_2 Y s^2 + b Y s + k Y)(m_1 s^2 + b s + k)$$

$$\Rightarrow k\bar{F} + k^2 Y = Y [m_1 m_2 s^4 + (m_1 + m_2) b s^3 + (k m_2 + b^2 + k m_1) s^2 + \dots + 2 k b s + k^2]$$

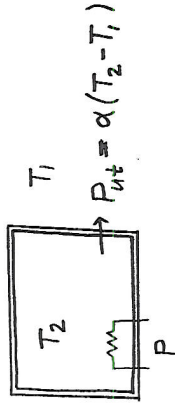
$$\Rightarrow k\bar{F} = Y [m_1 m_2 s^4 + (m_1 + m_2) b s^3 + (k m_2 + b^2 + k m_1) s^2 + 2 k b s]$$

Eftersom $V_2 = \dot{y}$ gäller att $V_2 = Y s$ som ger:

$$k\bar{F} = V_2 (m_1 m_2 s^3 + (m_1 + m_2) b s + (k m_2 + b^2 + k m_1) s + 2 k b)$$

$$\Rightarrow G = \frac{V_2}{\bar{F}} = \frac{k}{m_1 m_2 s^3 + b(m_1 + m_2) s^2 + (k m_2 + b^2 + k m_1) s + 2 k b}$$

7.7



$$P_{ut} = \alpha(T_2 - T_1)$$

Värmebalanskvationen ger

$$\frac{dE}{dt} = P_{in} - P_{ut} \quad \text{där} \quad E = V T_2 \rho c$$

$$\Rightarrow V \rho c \frac{dT_2}{dt} = P - \alpha(T_2 - T_1)$$

Med siffror fås

$$25 \frac{dT_2}{dt} + 0,05 T_2 = P + 0,05 T_1$$

Laplace transformering ger

$$25 \bar{T}_2 s + 0,05 \bar{T}_2 = \bar{P} + 0,05 \bar{T}_1$$

$$\Rightarrow \bar{T}_2 (25s + 0,05) = \bar{P} + 0,05 \bar{T}_1$$

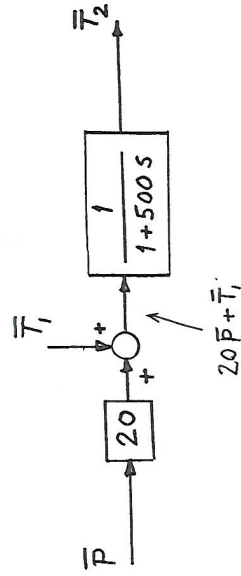
Multiplikation med 20 ger

$$\bar{T}_2 (1 + 500s) = 20 \bar{P} + \bar{T}_1$$

eller

$$\bar{T}_2 = (20 \bar{P} + \bar{T}_1) \cdot \frac{1}{1 + 500s}$$

Vilket motsvarar blockschemat



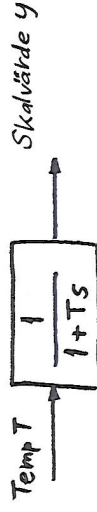
7.3

Lösningen finns i läroboken sid 99

7.8

Lösningen görs på samma sätt som 7.7

7.9



Insignal: Stegfunktion med höjden 80

$$\bar{T}(s) = \frac{80}{s}$$

$$\text{Utsignalens transform} \quad Y = \bar{T} \cdot G = \frac{80}{s(1+Ts)}$$

Motsvarande tidsfunktion
(enligt tabell)

$$y(t) = 80(1 - e^{-\frac{t}{T}})$$

Enligt uppgiftstexten gäller att $y(20) = 65$,
dessa ger

$$y(20) = 80(1 - e^{-\frac{20}{T}}) = 65$$

$$\Rightarrow e^{-\frac{20}{T}} = \frac{15}{80} = \frac{3}{16}$$

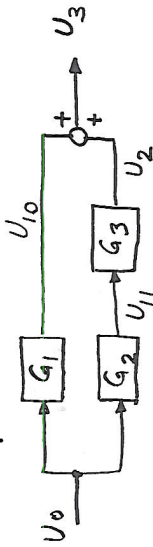
$$\Rightarrow -\frac{20}{T} = \ln\left(\frac{3}{16}\right) \Rightarrow T = \frac{-20}{\ln\left(\frac{3}{16}\right)} = 11,95$$

$V \rho c$ har brytits ur
derivatan eftersom
det är konstanter

T_1 och P kan ses som
insignaler som påverkar
utsignalen T_2 .
Motsvarande Laplace trans-
former betecknas
 $\bar{T}_1$, $\bar{P}$ och $\bar{T}_2$

7.12

Principiellt blockschema



För den undre tanken gäller:

$$\frac{dV_2}{dt} = U_{11} - U_2 \quad \text{där} \quad V_2 = A_2 h_2 = A_2 R_2 U_2$$

$$\Rightarrow A_2 R_2 \frac{dU_2}{dt} = U_{11} - U_2 \Rightarrow A_2 R_2 \frac{dU_2}{dt} + U_2 = U_{11}$$

Laplace transformering

$$U_2 (1 + A_2 R_2 s) = U_{11} \Rightarrow G_3 = \frac{U_2}{U_{11}} = \frac{1}{1 + A_2 R_2 s}$$

För övre tanken fås:

$$\frac{dV_1}{dt} = U_0 - U_{10} - U_{11} \Rightarrow A_1 \frac{dh_1}{dt} = U_0 - \frac{h_1}{R_{10}} - \frac{h_1}{R_{11}}$$

Laplace transformering ger

$$A_1 H_1 s = U_0 - H_1 \left(\frac{R_{10} + R_{11}}{R_{10} R_{11}} \right)$$

$$\Rightarrow A_1 R_{10} R_{11} H_1 s + H_1 (R_{10} + R_{11}) = R_{10} R_{11} U_0$$

$$\Rightarrow \frac{H_1}{U_0} = \frac{R_{10} R_{11}}{A_1 R_{10} R_{11} s + (R_{10} + R_{11})}$$

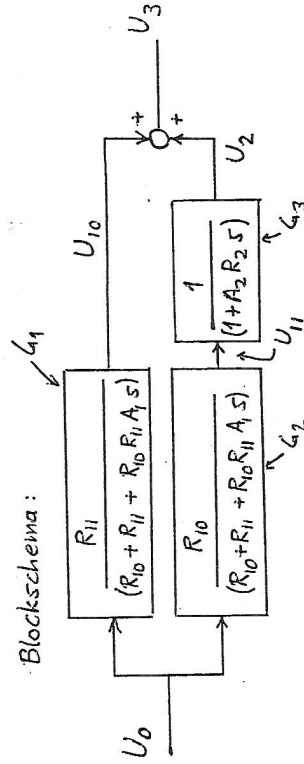
mult.
med
 $R_{10} R_{11}$

Eftersom utflödena U_{11} och U_{10} är direkt proportionella mot nivån ($U_{11} = h_1/R_{11}$, $U_{10} = h_1/R_{10}$) fås

$$G_1 = \frac{U_{10}}{U_0} = \frac{R_{11}}{A_1 R_{10} R_{11} s + R_{10} + R_{11}} \quad \text{resp.}$$

$$G_2 = \frac{U_{11}}{U_0} = \frac{R_{10}}{A_1 R_{10} R_{11} s + R_{10} + R_{11}}$$

Blockschema:



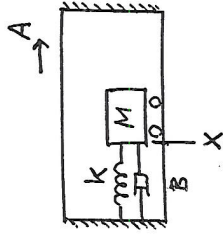
$$G_{TOT} = G_1 + G_2 \cdot G_3 = \frac{1}{(R_{10} + R_{11} + R_{10} R_{11} A_1 s)} \left[R_{11} + \frac{R_{10}}{(1 + A_2 R_2 s)} \right] =$$

$$= \frac{R_{11} (1 + A_2 R_2 s) + R_{10}}{(R_{10} + R_{11} + R_{10} R_{11} A_1 s) (1 + A_2 R_2 s)} =$$

$$= \frac{R_{10} + R_{11} + A_2 R_2 R_{11} s}{(R_{10} + R_{11}) + (A_2 R_2 R_{10} + A_2 R_2 R_{11} + A_1 R_{10} R_{11}) s + A_1 A_2 R_{10} R_{11} R_2 s^2}$$

OBS! Sammanslagningen av de tre blocken har gjorts med regler som studeras djupare i kapitel 8.

7.15 a



Newtons andra lag ger

$$\sum F = M(A + \ddot{x})$$

total acceleration (yttre + inre)

$$-kx - B\dot{x} = MA + M\ddot{x}$$

$$\Rightarrow M\ddot{x} + B\dot{x} + kx = -MA$$

Laplace-transformering ger:

$$X(Ms^2 + Bs + k) = -M\bar{A}$$

$$\Rightarrow G(s) = \frac{X}{\bar{A}} = \frac{-M}{Ms^2 + Bs + k} = \frac{-1}{s^2 + \left(\frac{B}{M}\right)s + \left(\frac{k}{M}\right)}$$

b) Följande formler används:

• Max översväng	$M_p = 100 \cdot \exp \frac{-\zeta \pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}$	(%)
• Tid vid max översväng	$t_p = \frac{\pi}{\omega_0 \sqrt{1-\zeta^2}}$	

Vi önskar $M_p = 5\%$, det ger följande ekvation

$$\exp \frac{-\zeta \pi}{\sqrt{1-\zeta^2}} = 0,05$$

$$\Rightarrow \frac{-\zeta \pi}{\sqrt{1-\zeta^2}} = \ln 0,05 = -2,996$$

$$\Rightarrow -\zeta \pi = -2,996 \sqrt{1-\zeta^2}$$

$$\Rightarrow \pi^2 \zeta^2 = 8,974 (1-\zeta^2)$$

$$\Rightarrow (\pi^2 + 8,974) \zeta^2 = 8,974$$

$$\Rightarrow \zeta = \sqrt{\frac{8,974}{\pi^2 + 8,974}} = 0,69$$

Om $\zeta = 0,69$
fås $M_p = 5\%$

Vi önskar vidare att $t_p = 1$, vilket ger

$$\frac{\pi}{\omega_0 \sqrt{1-\zeta^2}} = 1 \Rightarrow \omega_0 = \frac{\pi}{\sqrt{1-0,69^2}} = 4,34$$

dvs. om $\omega_0 = 4,34$
fås $t_p = 1$

Jämförelse med vår överföringsfunktion ger

$$\frac{B}{M} = 2\zeta\omega_0 \Rightarrow B = 2\zeta\omega_0 M = 2 \cdot 0,69 \cdot 4,34 \cdot 0,3 = 1,8$$

$$\frac{k}{M} = \omega_0^2 \Rightarrow k = M\omega_0^2 = 0,3 \cdot 4,34^2 = 5,65$$

Svar Välj $\begin{cases} B=1,8 \\ k=5,65 \end{cases}$

c) Processens statiska förstärkning är $G(0) = -\frac{M}{k} = -0,053$

Om $A = 1 \text{ m/s}^2$ fås därför massans utslag (stationärt): $-0,053 \text{ m} = -5,3 \text{ cm}$

7.17 a) För en process med översväng använder vi metoden i kapitel 7.6 för bestämning av överföringsfunktionen

$$\left. \begin{array}{l} \text{Mätningar med} \\ \text{linjal ger:} \end{array} \right\} \begin{array}{l} b=7,5 \\ a=15 \end{array} \Rightarrow d = \frac{7,5}{15} = 0,5$$

Formler på sid 115 ger:

$$T_s = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{2\pi}{\ln 0,5}\right)^2 + 1}} = 0,11$$

T_o uppmäts till 4,2 vilket ger

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{4,2 \sqrt{1-0,11^2}} = 1,51$$

Insättning i $G(s)$ ger

$$G(s) = \frac{50 \cdot 1,51^2}{s^2 + 2 \cdot 0,11 \cdot 1,51 s + 1,51^2} = \frac{114}{s^2 + 0,33 s + 2,28}$$

b) På samma sätt som ovan fås

$$\left. \begin{array}{l} d=0,33 \\ T_o=5 \\ K=20 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} s=0,174 \\ \omega_0=1,28 \end{array} \right\} \Rightarrow G(s) = \frac{33}{s^2 + 0,45 s + 1,64}$$

c-d) Använd metoden som är beskriven på sid 112-114 i faktaboken.

7.17 c

$$\text{Mätning ger } \left\{ \begin{array}{l} T_{1/3} = 2 \\ T_{2/3} = 3,6 \\ K = 3 \end{array} \right. \Rightarrow Q = \frac{3,6}{2} = 1,8$$

Eftersom $Q < 1,92$ krävs tre tidskonstanter

$$G = \frac{K}{(1+Ts)(1+aTs)(1+a^2Ts)}$$

Diagram 7.1 och 7.2 ger

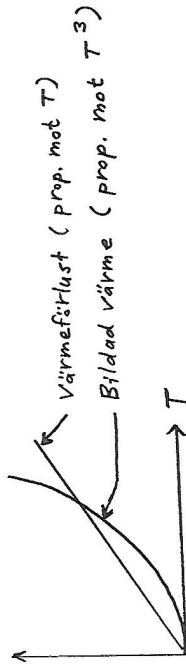
$$\left\{ \begin{array}{l} a=0,48 \\ P=1,12 \end{array} \right. \Rightarrow T = \frac{36}{1,12(1+0,48+0,48^2)} = 1,88$$

Insättning ger

$$G = \frac{3}{(1+1,88 s)(1+0,90 s)(1+0,43 s)}$$

7.19 a) $\frac{dE}{dt} = P_{in} - P_{ut}$ där $\begin{cases} P_{in} = P + 0,1 T^3 \\ P_{ut} = 5(T - T_0) = 5T \\ E = C \cdot T \end{cases}$

$\Rightarrow C \frac{dT}{dt} = P + 0,1 T^3 - 5 \cdot T$ (gäller för $T > 0$)



b) Vid en stationär punkt gäller att $\frac{dT}{dt} = 0$ (temperaturen konstant)

$\Rightarrow 0,1 T^3 - 5T = 0$

$\Rightarrow T(0,1 T^2 - 5) = 0$

$0,1 T^2 - 5 = 0 \Rightarrow T^2 = 50$

$\Rightarrow T = \sqrt{50} = 7,1$

Stationära punkter

$\begin{cases} T = 0 \\ T = 7,1 \text{ } ^\circ\text{C} \end{cases}$

Endast en av de stationära punkterna motsvarar en fortgående reaktion, nämligen den där $T = 7,1 \text{ } ^\circ\text{C}$

Linearisering ger

$f(t) = 0,1 T^3 - 5T \Rightarrow f'(t) = 0,3 T^2 - 5$

$f'(7,1) = 0,3 \cdot 7,1^2 - 5 = 10$

Vid arbetspunkten gäller alltså att

$\Delta f \approx 10 \cdot \Delta T$

Den lineariserade ekvationen (för små avvikelser från arbetspunkten $T = 7,1 \text{ } ^\circ\text{C}$) blir alltså:

$C \frac{dT}{dt} = 10 \cdot \Delta T + P$ där $C = 100$

c) Laplace-transformering ger

$100 \bar{\Delta T} S = 10 \bar{\Delta T} + \bar{P}$

$\Rightarrow (100S - 10) \bar{\Delta T} = \bar{P}$

$\Rightarrow G(s) = \frac{\bar{\Delta T}}{\bar{P}} = \frac{1}{100S - 10}$

Polbestämning $100S - 10 = 0$

$\Rightarrow S - 0,1 = 0 \Rightarrow S = 0,1$

Polen har positiv realdel vilket motsvarar en instabil process (enl avsnitt 6.4 och 10.1)

8.2 Transformera differentialekvationerna till överföringsfunktioner

Block 1: $Ys^2 + 2Ys + 3Y = 5Us + U$

$\Rightarrow Y(s^2 + 2s + 3) = U(5s + 1)$

$\Rightarrow G_1 = \frac{Y}{U} = \frac{5s + 1}{s^2 + 2s + 3}$

Block 2: $3Zs + 2Z = 6Y$

$\Rightarrow Z(3s + 2) = 6Y$

$\Rightarrow G_2 = \frac{Z}{Y} = \frac{6}{3s + 2}$

Eftersom blocken är seriekopplade fås:

$$G_{\text{tot}} = \frac{Z}{U} = G_1 \cdot G_2 = \frac{6(5s+1)}{(s^2+2s+3)(3s+2)} = \frac{30s+6}{3s^3+8s^2+13s+6}$$

8.3 a) Lagen om återkoppling ger

$$G = \frac{Y}{R} = \frac{G_1}{1 + G_1 G_2} = \frac{\frac{1}{1+10s}}{1 + \frac{1}{1+10s} \cdot \frac{1}{1+s}} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{multiplicera med} \\ (1+10s)(1+s) \text{ i} \\ \text{täljare \& nämnare} \end{array} \right\} = \frac{1+s}{(1+10s)(1+s) + 1} =$$

$$= \frac{1+s}{10s^2 + 11s + 2}$$

b) I uppgift b har vi inget block i återkopplingen, vilket innebär att $G_2 = 1$ (enhetsåterkoppling).

Detta ger

$$G = \frac{Y}{R} = \frac{\frac{1}{1+10s}}{1 + \frac{1}{1+10s} \cdot 1} = \frac{1}{(1+10s) + 1} = \frac{1}{2+10s}$$

c) I uppgift c har vi positiv återkoppling (två plusstecken i återföringen). Vi ska då ha minustecken i formeln för G_{tot} .

$$G_{\text{tot}} = \frac{Y}{R} = \frac{\frac{1}{1+10s}}{1 - \frac{1}{1+10s} \cdot \frac{1}{1+s}} = \frac{1+s}{(1+10s)(1+s) - 1} = \frac{1+s}{10s^2 + 11s}$$

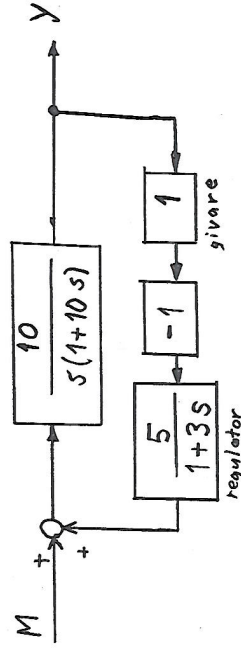
8.4 a) Vid bestämning av överföringsfunktionen från Y_{ref} till y kan vi bortse från störningen M (den kan sättas lika med noll). Regulatorns och processens block blir då senekopplade, vilket ger:

$$\frac{Y}{Y_{REF}} = \frac{\frac{5}{(1+3s)} \cdot \frac{10}{s(1+10s)}}{1 + \frac{5}{(1+3s)} \cdot \frac{10}{s(1+10s)} \cdot 1} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Multiplicera med} \\ (1+3s)(1+10s) \cdot s \cdot \\ \text{i täljare och} \\ \text{nämne} \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{50}{(1+3s)s(1+10s) + 50} = \frac{50}{30s^3 + 13s^2 + s + 50}$$

b) Vid bestämning av överföringsfunktionen från M till y kan vi "nollställa" bärvärdet Y_{ref} [Enligt superpositionsprincipen]

Blockschema kan ritas om enligt nedan:



- OBSERVERA
- * Regulatorn hamnar nu i återkopplingen
 - * Det blir positiv återkoppling
 - * Minustecknet i jämföraren blir ett eget block (eller kan flyttas in i annat block)

Återkopplingslagen ger nu:

$$\frac{Y}{M} = \frac{\frac{10}{s(1+10s)}}{1 - \frac{10}{s(1+10s)} \cdot \frac{-5}{(1+3s)}} =$$

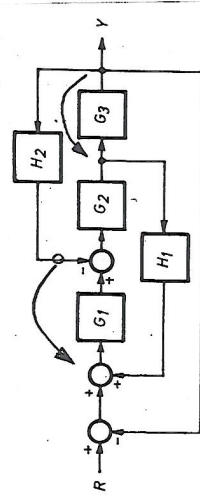
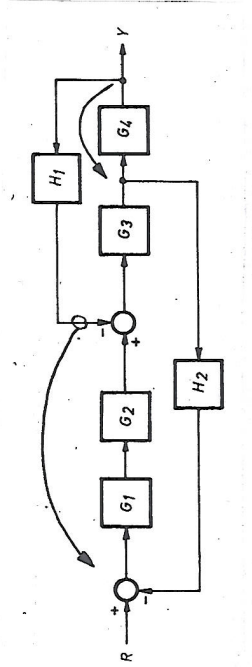
$$= \frac{10(1+3s)}{s(1+10s)(1+3s) + 50} = \frac{10+30s}{30s^3 + 13s^2 + s + 50}$$

Denna motsvarar de tre blocken i återkopplingen

8.5

Ledtrådar för att komma igång

- Börja med den inre loopen (slå ihop G_1 , G_2 och G_3 till ett block). Fortsätt därefter med hela systemet.
- Flytta den mellersta förgreningspunkten efter blocket G_3 , se lagarna på sid 124. Använd därefter lagen om parallellkoppling och lagen om återkoppling.
- d) Flytta differenspunkten och förgreningspunkten före blocken (enligt figur). Därefter används lagen om parallellkoppling och återkoppling



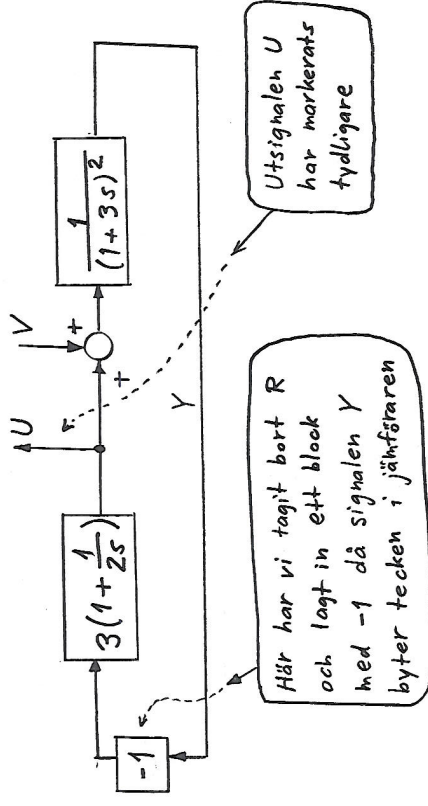
- Börja med den inre loopen (slå ihop G_1 och G_2 till ett block). Fortsätt därefter med den yttre loopen och multiplicera till sist med G_4 .

8.7

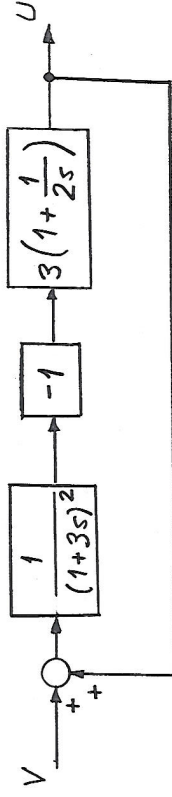
Vid bestämning av överföringsfunktionen från

V till U kan vi bortse från signalen R.

Blocksschemat kan ritas om i 2 steg enligt nedan:



Nu kan vi rita om systemet (färvränga det) på följande sätt



Återkopplingslagen ger nu (positiv återkoppling):

$$G_{VU} = \frac{U}{V} = \frac{-1}{1 - \frac{-1}{(1+3s)^2} \cdot 3\left(1 + \frac{1}{2s}\right)} = \left\{ \begin{array}{l} \text{mult med} \\ 2s(1+3s)^2 \\ \text{"uppe och nere"} \end{array} \right\} =$$

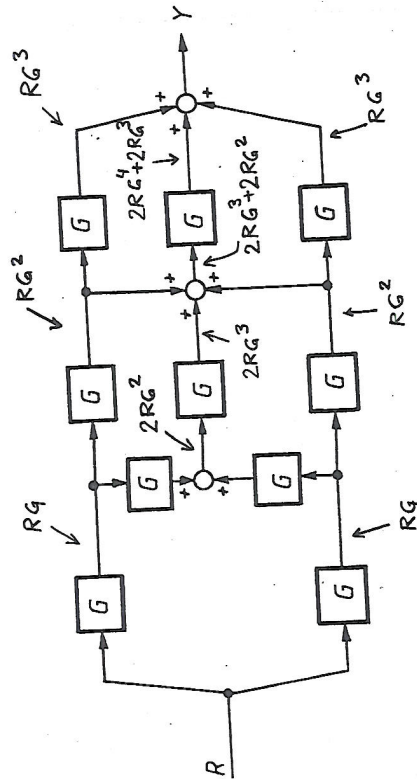
$$= \frac{-3(2s+1)}{2s(1+3s)^2 + 3(2s+1)} = \frac{-(6s+3)}{18s^3 + 12s^2 + 8s + 3}$$

8.10

För varje linjärt block gäller att utsignalens transform är lika med insignalens transform multiplicerat med överföringsfunktionen



För det aktuella systemet får vi:



Vi ser att $Y = 2RG^4 + 2RG^3 + 2RG^3 = 2R(G^4 + 2G^3)$

dvs $G_{\text{Tot}} = \frac{Y}{R} = 2G^4 + 4G^3$

Insättning av $G = \frac{1}{1+s}$ ger:

$$G_{\text{Tot}} = \frac{2}{(1+s)^4} + \frac{4}{(1+s)^3} = \frac{2 + 4(1+s)}{(1+s)^4} = \frac{6+4s}{(1+s)^4}$$

9.1

Alla uppgifter här bygger på att man behärskar de grundläggande lagarna för komplexa tal. De viktigaste lagarna finns i appendix i faktaboken.

a) $G(j\omega) = \frac{5}{1+2j\omega}$

$$A(\omega) = |G(j\omega)| = \frac{|5|}{|1+2j\omega|} = \frac{5}{\sqrt{1+4\omega^2}}$$

$$\varphi(\omega) = \angle G(j\omega) = \angle 5 - \angle 1+2j\omega = 0 - \arctan\left(\frac{2\omega}{1}\right) = -\arctan(2\omega)$$

b) $G(j\omega) = \frac{4}{j\omega}$

$$A(\omega) = |G(j\omega)| = \frac{|4|}{|j\omega|} = \frac{4}{\omega}$$

$$\varphi(\omega) = \angle G(j\omega) = \angle 4 - \angle j\omega = 0 - 90^\circ = -90^\circ$$

c) $G(j\omega) = \frac{10}{j\omega(1+3j\omega)}$

$$A(\omega) = |G(j\omega)| = \frac{|10|}{|j\omega(1+3j\omega)|} = \frac{10}{\omega \cdot \sqrt{1+9\omega^2}}$$

$$\varphi(\omega) = \angle G(j\omega) = \angle 10 - \angle j\omega - \angle 1+3j\omega = 0 - 90^\circ - \arctan(3\omega)$$

$$d) \quad G(j\omega) = \frac{e^{-3j\omega}}{1+2j\omega}$$

$$A(\omega) = |G(j\omega)| = \frac{|e^{-3j\omega}|}{|1+2j\omega|} = \frac{1}{\sqrt{1+4\omega^2}} \quad *$$

$$\varphi(\omega) = \angle G(j\omega) = \angle e^{-3j\omega} - \angle 1+2j\omega = -3\omega \left(\frac{180}{\pi}\right)^* - \arctan(2\omega)$$

$$e) \quad G(j\omega) = \frac{6+j\omega}{(4+2j\omega)(3+7j\omega)}$$

$$A(\omega) = |G(j\omega)| = \frac{\sqrt{36+\omega^2}}{\sqrt{16+4\omega^2} \cdot \sqrt{9+49\omega^2}}$$

$$\varphi(\omega) = \angle G(j\omega) = \angle 6+j\omega - \angle 4+2j\omega - \angle 3+7j\omega =$$

$$= \arctan\left(\frac{\omega}{6}\right) - \arctan\left(\frac{2\omega}{4}\right) - \arctan\left(\frac{7\omega}{3}\right)$$

* Eftersom $e^{-Lj\omega} = \cos(-L\omega) + j \cdot \sin(-L\omega)$
 fås $|e^{-Lj\omega}| = \sqrt{\cos^2(-L\omega) + \sin^2(-L\omega)} = \sqrt{1} = 1$
 och $\angle e^{-Lj\omega} = \arctan\left(\frac{\sin(-L\omega)}{\cos(-L\omega)}\right) = \arctan(\tan(-L\omega)) =$
 $= -(L\omega) \text{ rad} = -L\omega \left(\frac{180}{\pi}\right) \text{ grader}$

$$g) \quad G(j\omega) = \frac{2}{1+0,4j\omega + 2(j\omega)^2} =$$

$$= \frac{2}{\underbrace{1-2\omega^2}_{\text{RE}} + \underbrace{0,4j\omega}_{\text{IM}}}$$

$$A(\omega) = |G(j\omega)| = \frac{2}{\sqrt{(1-2\omega^2)^2 + 0,16\omega^2}}$$

$$\varphi(\omega) = \angle G(j\omega) = \angle 2 - \angle (1-2\omega^2) + 0,4j\omega =$$

$$= 0 - \arctan\left(\frac{0,4\omega}{1-2\omega^2}\right) \quad \text{Om } (1-2\omega^2) > 0$$

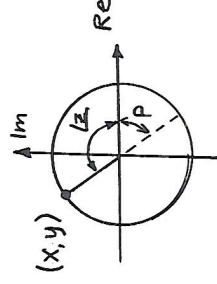
$$= 0 - \arctan\left(\frac{0,4\omega}{1-2\omega^2}\right) - 180^* \quad \text{Om } (1-2\omega^2) < 0$$

OBS!

$$(j\omega)^2 = j^2 \omega^2 = -\omega^2$$

* Om det komplexa talet $z = x + jy$ har negativ realdel (dvs $x < 0$) gäller för dess fasvinkel (argument):

$$\angle z = \arctan \frac{y}{x} \pm 180^\circ$$



Om man inte lägger till/drar i från 180° fås felaktigt vinkeln p, då uttrycket evalueras med en räknedosa

9.4

Utan regulator

$$G_{VV} = \frac{Y}{V} = \frac{1}{(1+s)^2} \quad G(j\omega) = \frac{1}{(1+j\omega)^2}$$

$$A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2} \cdot \sqrt{1+\omega^2}} = \frac{1}{1+\omega^2}$$

$$\omega = 0,2 \text{ ger } A(0,2) = \frac{1}{1+0,2^2} = 0,962$$

$$\Rightarrow A_y = 0,962$$

Med regulator

$$G_{VV} = \frac{\frac{1}{(1+s)^2}}{1 + \frac{1}{s(1+s)^2}} = \frac{s}{s(1+s)^2 + 1} = \frac{s}{s^3 + 2s^2 + s + 1}$$

$$G(j\omega) = \frac{j\omega}{(j\omega)^3 + 2(j\omega)^2 + j\omega + 1} = \frac{j\omega}{(1-2\omega^2) + j(\omega-\omega^3)}$$

Frekv.
funktion

$$A(\omega) = |G(j\omega)| = \frac{\omega}{\sqrt{(1-2\omega^2)^2 + (\omega-\omega^3)^2}}$$

Amplitud
fktn.

$$\omega = 0,2 \text{ ger } A(0,2) = \dots = 0,213 \Rightarrow A_y = 0,213$$

Slutsats

Störningen har mindre inverkan på utsignalen hos det återkopplade regelsystemet jämfört med fallet utan reglering.

9.5

$$G(j\omega) = \frac{K e^{-Lj\omega}}{1 + Tj\omega} \Rightarrow \varphi(\omega) = -L\omega\left(\frac{180}{\pi}\right) - \arctan(T\omega)$$

$$A(\omega) = |G(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{1+T^2\omega^2}}$$

Vi vet att $A(1) = 5$ och $A(2) = 3,6$.

Det ger:

$$\begin{cases} \frac{K}{\sqrt{1+T^2}} = 5 \Rightarrow K = 5\sqrt{1+T^2} & (1) \\ \frac{K}{\sqrt{1+4T^2}} = 3,6 \Rightarrow K = 3,6\sqrt{1+4T^2} & (2) \end{cases}$$

$$(1)+(2) \text{ ger att } 5\sqrt{1+T^2} = 3,6\sqrt{1+4T^2}$$

$$\Rightarrow 25(1+T^2) = 12,96(1+4T^2)$$

$$\Rightarrow 26,84T^2 = 12,04$$

$$\Rightarrow T = \sqrt{\frac{12,04}{26,84}} = 0,67$$

$$K = 5\sqrt{1+0,67^2} = 6,02$$

Vi vet också att $\varphi(1) = -100^\circ$

Det ger

$$\varphi(1) = -L\left(\frac{180}{\pi}\right) - \arctan(0,67) = -100$$

$$\Rightarrow -L \cdot 57,3 - 33,8 = -100$$

$$\Rightarrow L = \frac{66,2}{57,3} = 1,16$$

$$\text{dvs } \begin{cases} T = 0,67 \\ K = 6,02 \\ L = 1,16 \end{cases}$$

$$G(j\omega) = \frac{3,2 e^{-2j\omega}}{(1 + 3j\omega)}$$

$$G(s) = \frac{3,2 e^{-2s}}{(1 + 3s)}$$

$$A(\omega) = \frac{3,2}{\sqrt{1 + 9\omega^2}}$$

Amplitudkurvan

Dödtiden påverkar ej amplitudkurvan

Statisk förstärkning = $A(0) = 3,2$

Tidskonstant $T = 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Brytfrekvens $\omega_b = \frac{1}{3} \text{ rad/s}$

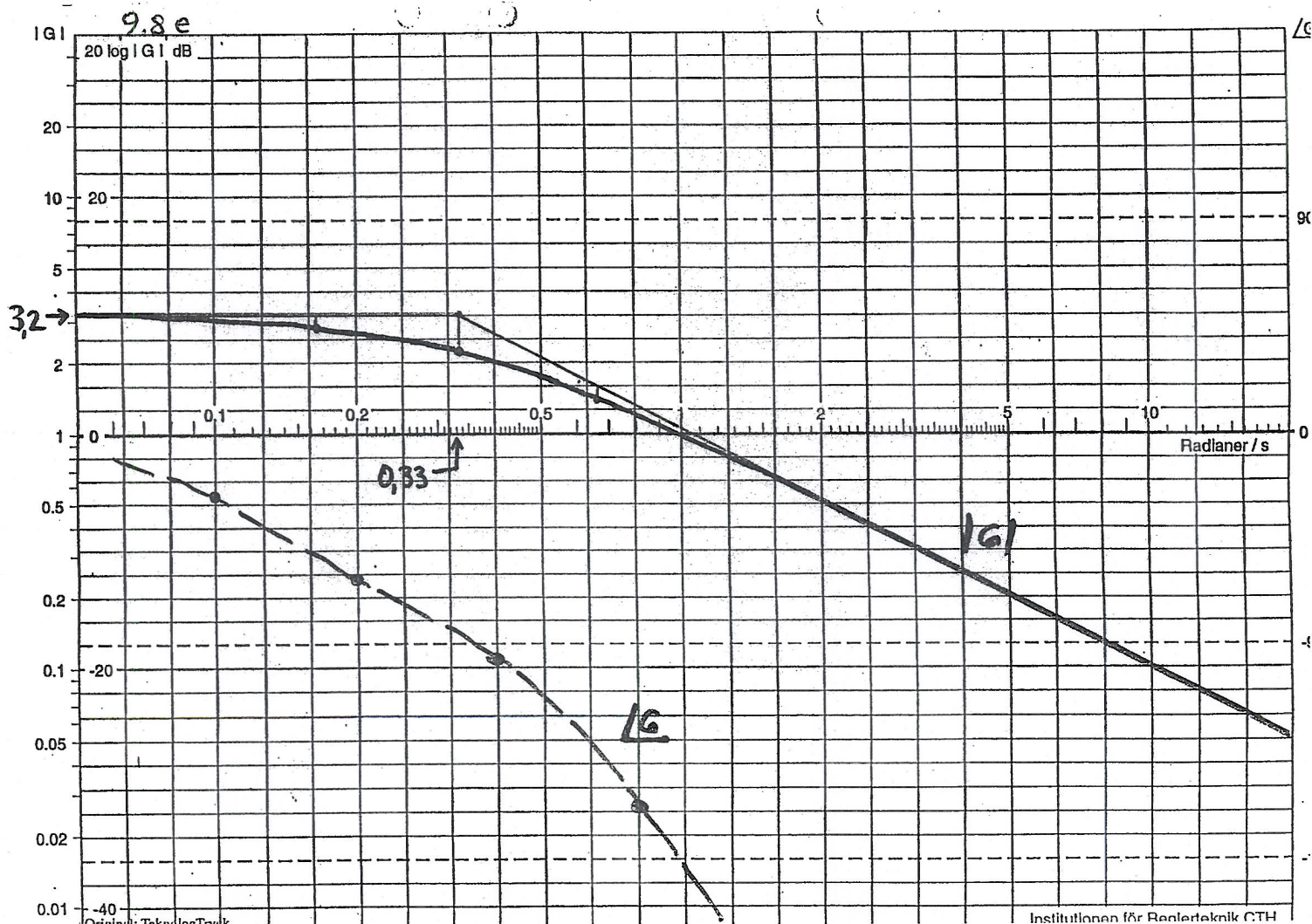
Amplitudkurvan bryter nedåt vid ω_b

Faskurvan

$$\varphi(\omega) = -2\omega \left(\frac{180}{\pi} \right) - \arctan(3\omega)$$

ω		$\varphi(\omega)$
0,1	-11,5 - 16,7	-28
0,2	-23 - 31	-62
0,4	-46 - 50	-96
0,8	-92 - 67	-159
1,6	-183 - 78	-261

Beräknad med räknedosa



9.10

Vi antar att systemet ^{endast} har reella poler.

LF-asymptoten har lutningen noll $\Rightarrow$ Ingen integration

$$K_{LF} = 5 \quad (\text{statisk förstärkning})$$

Brytfrekvenserna ger

$$\begin{cases} \omega = 0,2 \Rightarrow \text{Faktor } (1+5s) \text{ i nämnaren} \\ \omega = 0,5 \Rightarrow \text{--} \text{ i } (1+2s) \text{ i täljaren} \\ \omega = 2 \Rightarrow \text{--} \text{ i } (1+0,5s)^2 \text{ i nämnaren} \\ \quad \quad \quad (\text{dubbel}) \end{cases}$$

$$\text{Sammantaget fås} \quad G(s) = \frac{5(1+2s)}{(1+5s)(1+0,5s)^2}$$

9.11

Ur bodediagrammet kan vi konstatera:

- LF-asymptoten har lutningen noll, dvs vi har ingen integration i processen (inget ensamt s i nämnaren)
- Den statiska förstärkningen $K_{LF} = 5$
- Vi har en dubbel brytpunkt vid $\omega = 0,8 \text{ rad/s}$ motsvarande tidskonstanten $T = \frac{1}{0,8} = 1,25$
- Fösvridningen ökar obegränsat då $\omega \rightarrow \infty$ vilket ger att processen måste ha död tid e^{-Ls}

Vi får
ALLTSA

$$G = \frac{5 \cdot e^{-Ls}}{(1+1,25s)^2}$$

För att bestämma död tiden L får vi titta på fösvridningen vid någon viss frekvens (t.ex $\omega = 1 \text{ rad/s}$)

$$G(j\omega) = \frac{5 \cdot e^{-Lj\omega}}{(1+1,25j\omega)^2} \Rightarrow \varphi(\omega) = -L\omega \frac{180}{\pi} - 2 \cdot \arctan(1,25\omega)$$

Vi vet att $\varphi(1) = -128^\circ$ (enl Bodediagrammet)

$$\text{dvs.} \quad -L \cdot \frac{180}{\pi} - 2 \cdot \arctan(1,25) = -128^\circ$$

$$\Rightarrow L = \frac{128 - 2 \cdot \arctan(1,25)}{\frac{180}{\pi}} = \pi \cdot \frac{25,32}{180} = 0,44$$

$$\text{dvs } G = \frac{5 \cdot e^{-0,44s}}{(1+1,25s)^2}$$