

Föreläsning 12

Analoga filter

Erik Agrell 2017-10-03

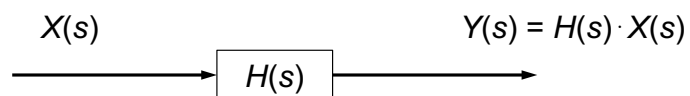
Innehåll:

1. Filterteori
2. Filtertyper



Bilder av Lars Bengtsson och Erik Agrell

1. Filterteori



Överföringsfunktion

$$H(s) = \frac{(1-s/n_1) \cdots (1-s/n_N)}{(1-s/p_1) \cdots (1-s/p_P)}$$
$$= A \frac{(s-n_1) \cdots (s-n_N)}{(s-p_1) \cdots (s-p_P)}$$

- $n_1, n_2, \dots$ är **nollställen**
- $p_1, p_2, \dots$ är **poler**

$$A = \frac{p_1 \cdots p_P}{n_1 \cdots n_N}$$

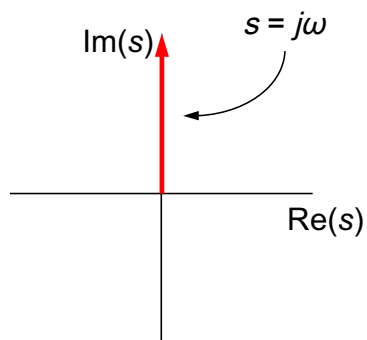
Poler och nollställen

- Poler och nollställen är **komplexa**
 - $H(s)$ har **reella** koefficienter
- ⇒ poler och nollställen är antingen reella eller förekommer i **komplexkonjugerade par**

- Stabilt filter $\Leftrightarrow$ alla poler i vänstra halvplanet

Frekvenskaraktistik

I det komplexa s -planet kan den positiva imaginäraxeln tolkas som frekvensaxeln



Om vi vet **överföringsfunktionen** $H(s)$ kan vi räkna ut:

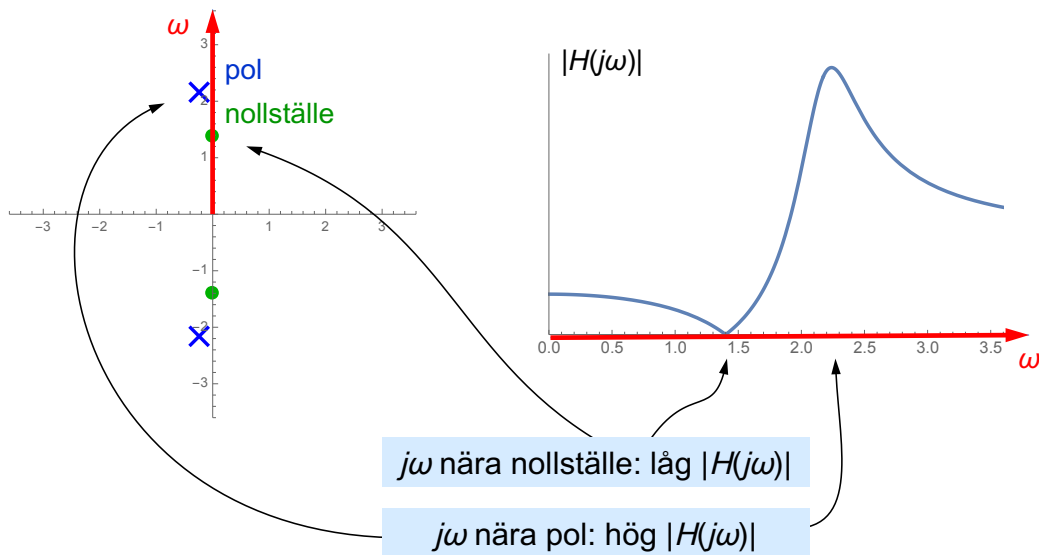
- **Frekvensfunktionen** $H(j\omega)$
- **Amplitudfunktionen** $|H(j\omega)|$
- **Fasfunktionen** $\arg H(j\omega) = \angle H(j\omega)$

Specialfall:

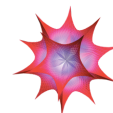
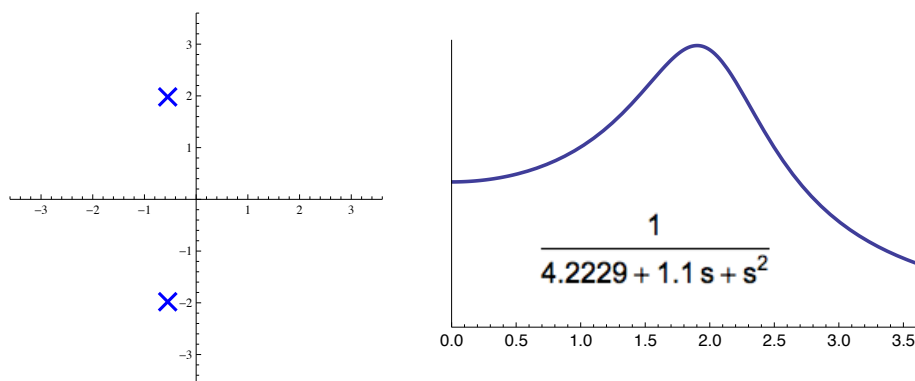
- $H(0)$ bestämmer DC-egenskaper
- $H(\infty)$ bestämmer högfrekvens-egenskaper

Amplitudfunktion

$$H(j\omega) = A \frac{(j\omega - n_1) \cdots (j\omega - n_N)}{(j\omega - p_1) \cdots (j\omega - p_P)} \Rightarrow |H(j\omega)| = A \frac{|j\omega - n_1| \cdots |j\omega - n_N|}{|j\omega - p_1| \cdots |j\omega - p_P|}$$



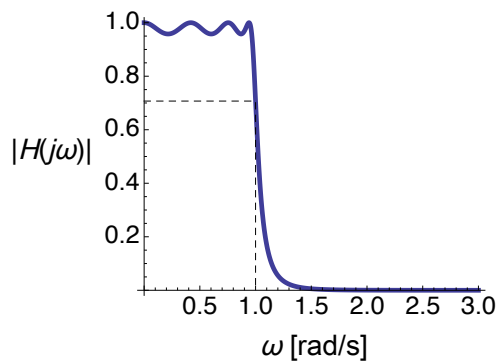
Filterdemonstration 1



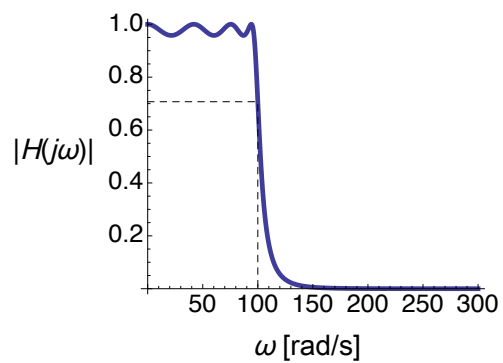
Mathematica
demo

Frekvenstransformering

Vi har detta:



Vi vill ha detta:



Vad gör vi?

Svar: byt s mot $s/100$ i $H(s)$!

Om $H(s)$ har bandbredd B ,
så har $H(s/c)$ bandbredd $c \cdot B$

- Motsvarande gäller gränshänsen, centerhänsen etc., eftersom hela frekvensaxeln skalas om.
- Många filter specificeras för gränshänsen 1 rad/s.

Exempel

Ett 3e ordningens LP-filter (Chebyshev) med gränshfrekvens 1 rad/s har överföringsfunktionen

$$H_1(s) = \frac{1}{1 + 3.71s + 3.38s^2 + 4s^3}$$

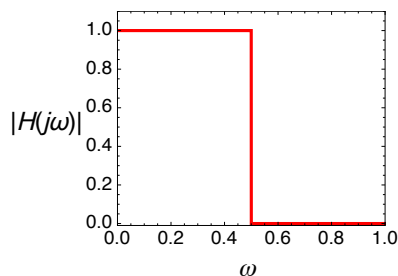
Beräkna överföringsfunktionen för ett Chebyshev-filter med gränshfrekvens 1 kHz.



Svar: $H(s) = \frac{1}{1 + 5.91 \cdot 10^{-4}s + 6.04 \cdot 10^{-8}s^2 + 1.61 \cdot 10^{-11}s^3}$

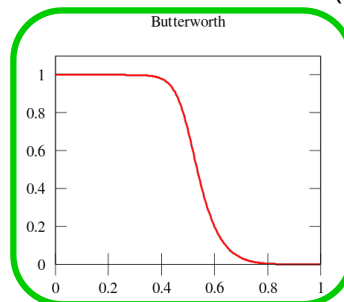
2. Filtertyper

Idealt LP-filter:



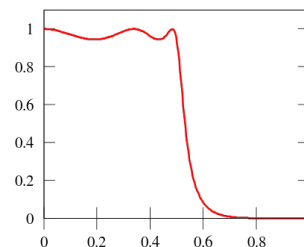
(kan inte byggas)

Praktiska LP-filter (ordning 5):

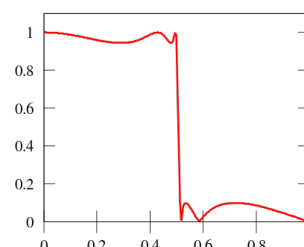
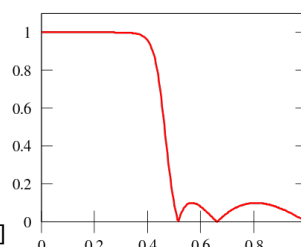


Chebyshev type 2

Chebyshev type 1



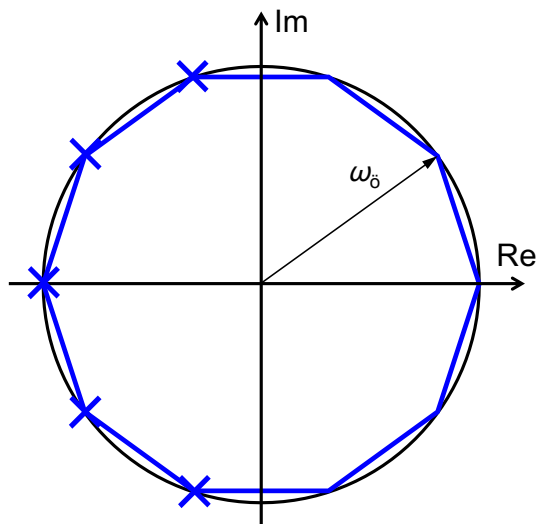
Elliptic



[Wikipedia]

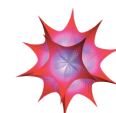
Butterworth-filter

En **maximalt flat** filterkaraktäristik får man genom att placera polerna jämnt utspridda **på en halvcirkel**

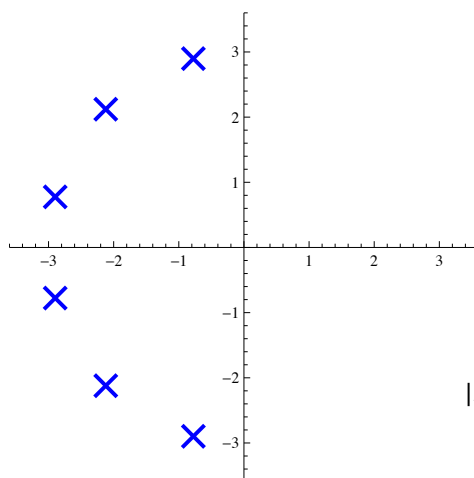


- Cirkelns radie är gränsfrekvensen i rad/s
- "jämnt utspridda" betyder som hörnen på en $2n$ -hörning (för filterordning n)

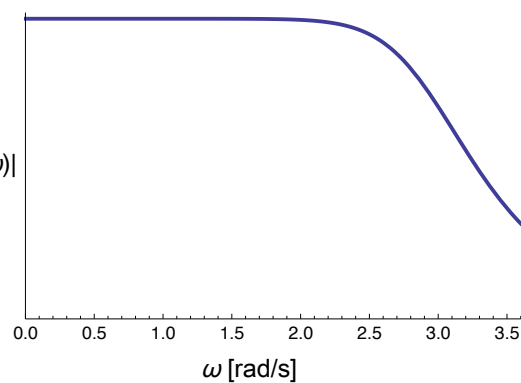
Filterdemonstration 2



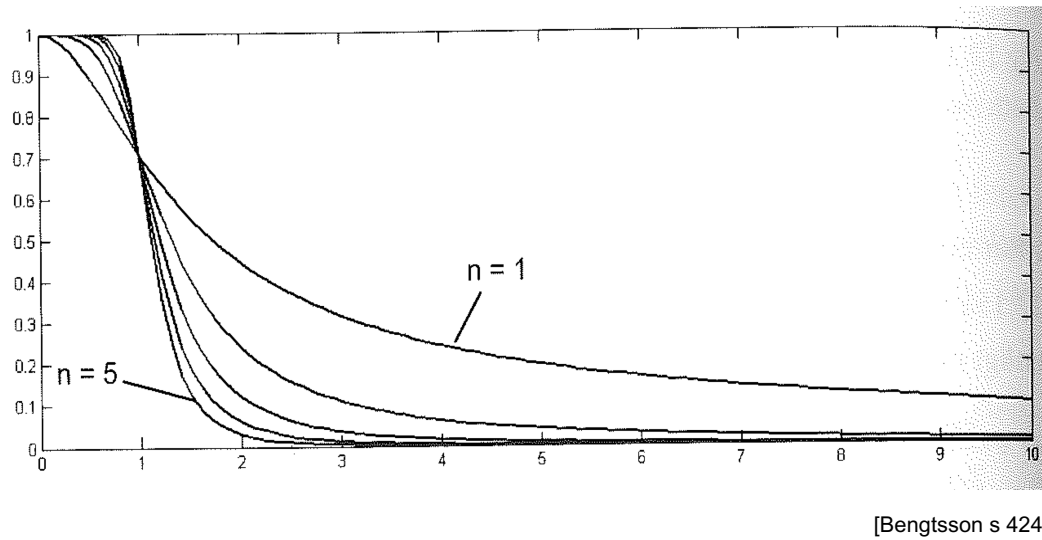
Mathematica
demo



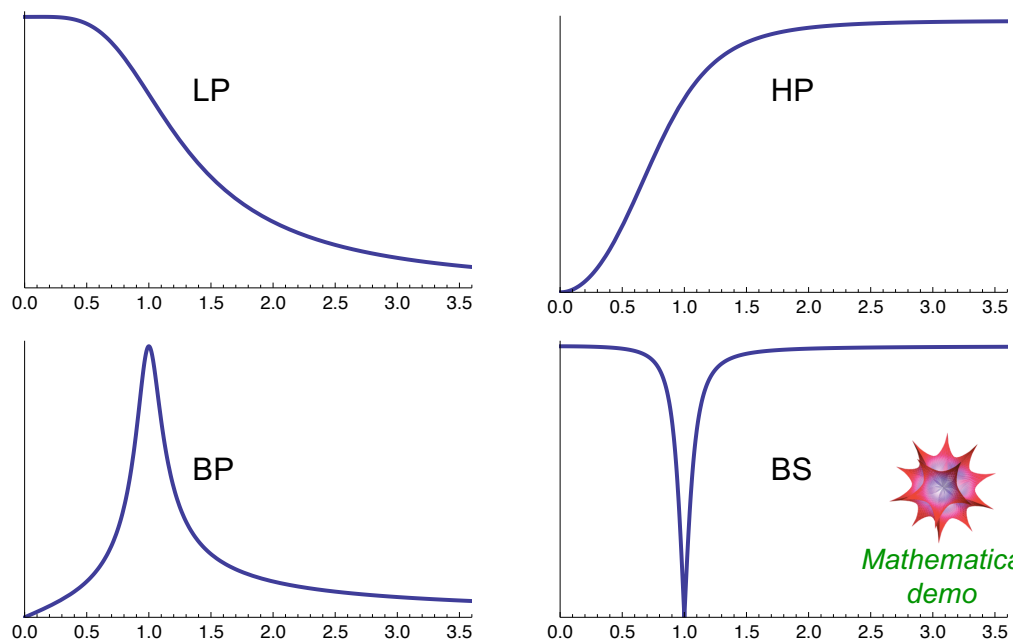
$|H(j\omega)|$



Butterworth-filter av olika ordning

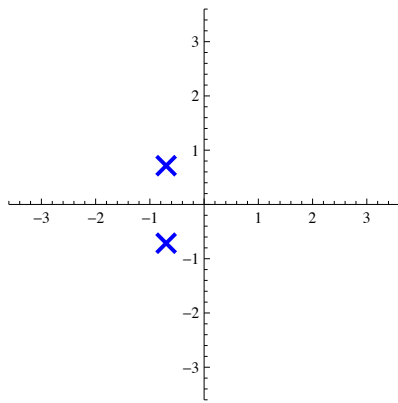


Andra filtertyper

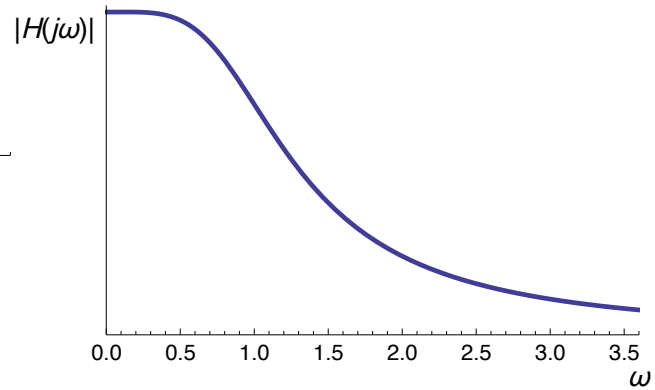


Lågpas (LP)

Exempel: $H(s) = \frac{1}{1 + 1.4s + s^2}$

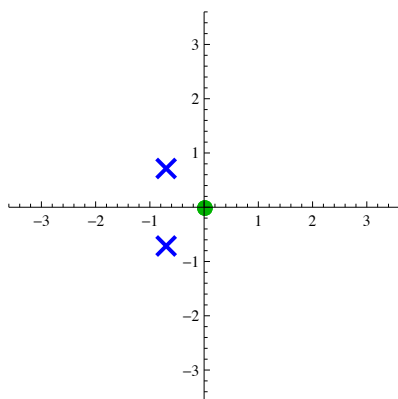


poler

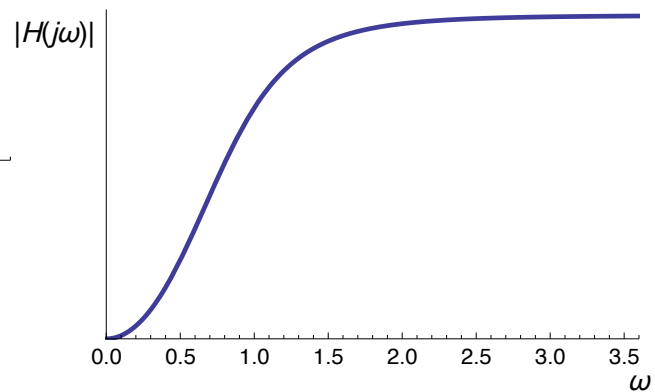


Högpas (HP)

Exempel: $H(s) = \frac{s^2}{1 + 1.4s + s^2}$

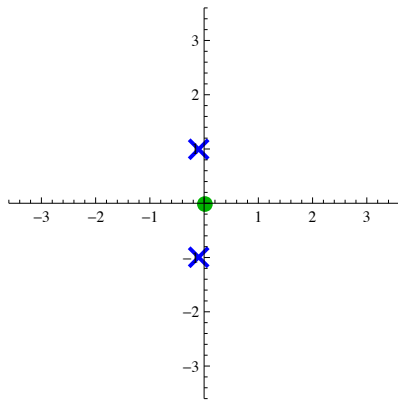


poler
nollställen

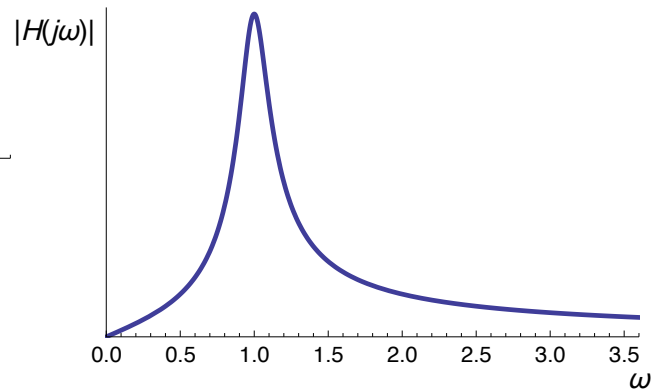


Bandpass (BP)

Exempel: $H(s) = \frac{s}{1 + 0.2s + s^2}$

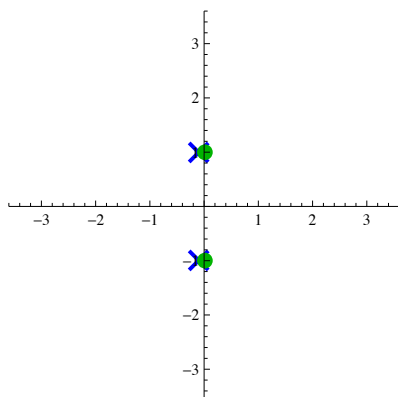


poler
nollställen

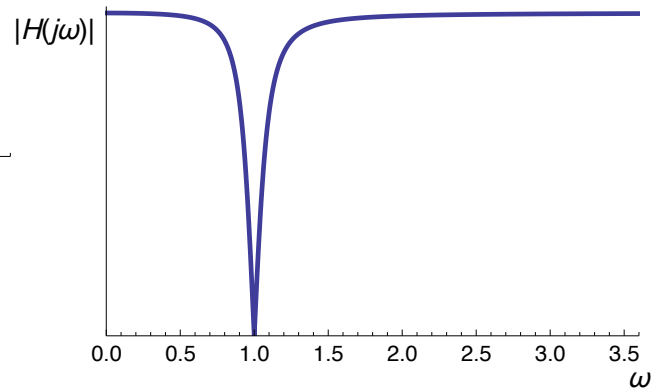


Bandspärr (BS)

Exempel: $H(s) = \frac{1 + s^2}{1 + 0.2s + s^2}$



poler
nollställen



Filtertabeller

De vanligaste typerna av filter kan konstrueras från tabeller med filterpolynom

Butterworth-polynom:

Ordning	Polynom $P(a)$
1	$1 + a$
2	$1 + 1.414a + a^2$
3	$1 + 2a + 2a^2 + a^3$ $= (1 + a)(1 + a + a^2)$
4	$1 + 2.613a + 3.414a^2 + 2.613a^3 + a^4$ $= (1 + 0.765a + a^2)(1 + 1.848a + a^2)$

Chebyshev-polynom av typ 1 med 3 dB rippel:

Ordning	Polynom $P(a)$
2	$1.414 + 1.287a + 2a^2$ $= 1.414(1 + 0.910a + 1.414a^2)$
3	$1 + 3.711a + 2.384a^2 + 4a^3$ $= (1 + 3.355a)(1 + 0.355a + 1.192a^2)$
4	$1.414 + 3.231a + 9.348a^2 + 4.644a^3 + 8a^4$ $= 1.414(1 + 0.188a + 1.108a^2)(1 + 2.096a + 5.108a^2)$

Filterkonstruktion med hjälp av tabell

LP med gränshfrekvens ω_o :

$$H_{LP}(s) = \frac{1}{P(s/\omega_o)}$$

HP med gränshfrekvens ω_u :

$$H_{HP}(s) = \frac{1}{P(\omega_u/s)}$$

Exempel: Konstruera ett andra ordningens Butterworth HP-filter med gränshfrekvens 10 rad/s



Resultat: som bild 16 med ändrad ω -skala

Läs & lös

Läs:

- Bengtsson s 359–373 (linjära system, poler och nollställen)
- Bengtsson s 410–414, 423–425, 430 (filterteori)

Lös:

- Bengtsson uppg 10.7
- Bengtsson uppg 12.1 och 12.17a–b

10.7 Vilka av följande system är stabila:

a $H(s) = \frac{s^2 + 4}{s^2 + 2s + 9}$ **b** $H(s) = \frac{s}{s^2 - 6s + 8}$ **c** $H(s) = \frac{3s - 7}{s^2 + 3s - 9}$

12.1 Ange överföringsfunktionen för filtren nedan. Ange om det är låg- eller högpasfilter samt ω_0 .

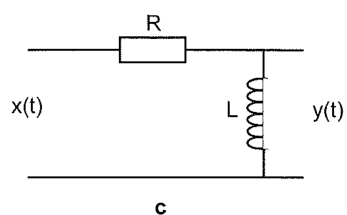
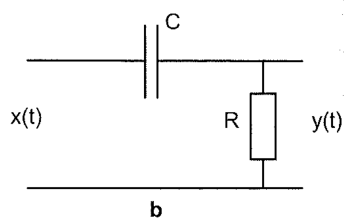
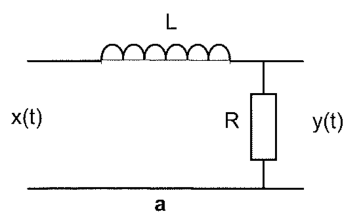


Fig 12.27 Första ordningens passiva filter

12.17a I tabell 12.2 är Chebyshev-filtret av ordning 3 skrivet som ett tredjegradspolynom. Separera detta polynom så att du kan skriva filtret som en seriekoppling av ett första och ett andra ordningens filter.

12.17b Använd transformeringsreglerna i avsnitt 12.5 för att transformera filtret till ett lågpasfilter med gränsfrekvensen 1 kHz.

12.17c Realisera detta filter med hjälp av en första och en andra ordningens Sallen-Key-länk.

$$\frac{0,2506}{s^3 + 0,5972s^2 + 0,9283s + 0,2506}$$