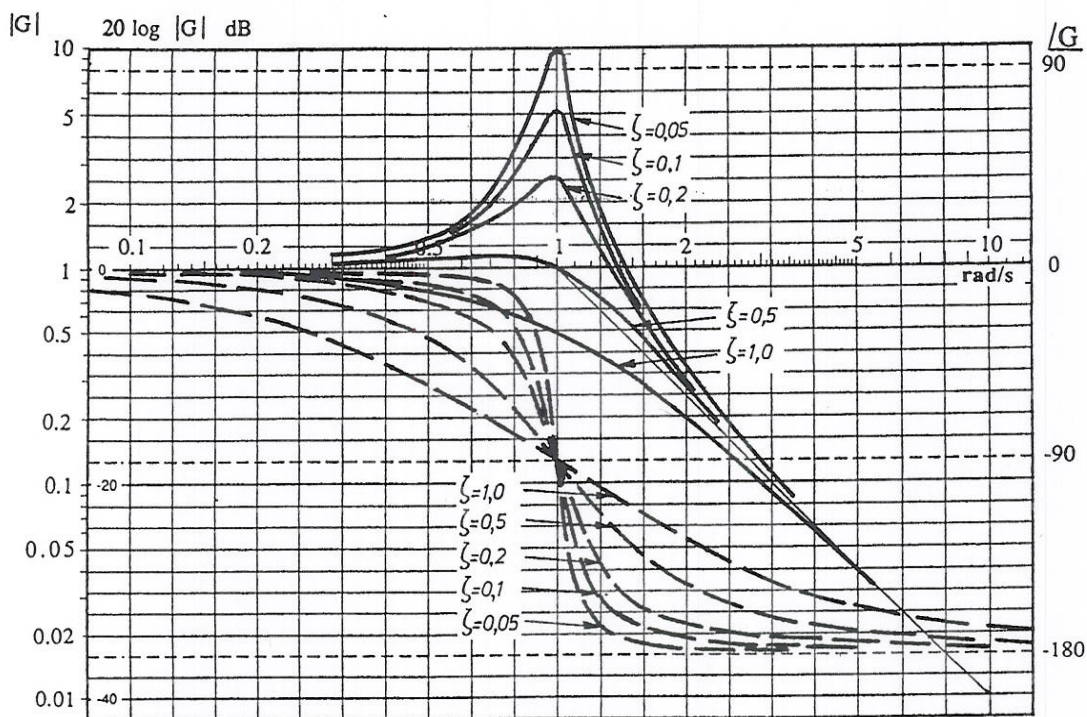


FORMEL SAMLING



Reglerteknik

Exempel på lineära regulator typer

Regulator	Funktion	Överföringsfunktion $G(s)$
P-regulator	$u(t) = u_0 + K \cdot e(t)$	$G(s) = K$
I-regulator	$u(t) = \frac{1}{T_I} \int_0^t e(t) dt$	$G(s) = \frac{1}{T_I \cdot s}$
Deriverande block	$u(t) = T_D \cdot e'(t)$	$G(s) = T_D \cdot s$
PI-regulator	$u(t) = K[e(t) + \frac{1}{T_I} \int_0^t e(t) dt]$	$G(s) = K \left(1 + \frac{1}{T_I \cdot s} \right)$
PD-regulator	$u(t) = K[e(t) + T_D \cdot e'(t)]$	$G(s) = K(1 + T_D \cdot s)$
PID-regulator (ideal typ)	$u(t) = K[e(t) + \frac{1}{T_I} \int_0^t e(t) dt + T_D \cdot e'(t)]$	$G(s) = K \left(1 + \frac{1}{T_I \cdot s} + T_D \cdot s \right)$
Lead-filter	$u(t) + Tu'(t) = e(t) + bTe'(t)$	$G(s) = \frac{1+bTs}{1+Ts}$, där $b > 1$
Lag-filter	$u(t) + aTu'(t) = a[e(t) + Te'(t)]$	$G(s) = a \cdot \frac{1+Ts}{1+aTs}$, där $a > 1$
PID-regulator (med D-verkan endast på mätsignalen $y(t)$)	$u(t) = K[e(t) + \frac{1}{T_I} \int_0^t e(t) dt - T_D \cdot y'(t)]$	$U(s) = K \left(1 + \frac{1}{T_I \cdot s} \right) E(s) - KT_D Y(s) \cdot s$

I tabellen ovan gäller:

u_0 = styrsignalens normalvärde (vid P-reglering)

K = förstärkningen

T_I = integrationstiden

T_D = derivat tiden

Specialfall av PID-regulatorer

Regulator	Överföringsfunktion
PID-regulator med lågpasfilter på derivatadeln.	$G(s) = K \left(1 + \frac{1}{T_I \cdot s} + \frac{T_D \cdot s}{1 + \alpha \cdot T_D \cdot s} \right)$
PID-regulator på serieform.	$G(s) = K \left(\frac{1 + T_I \cdot s}{T_I \cdot s} \right) (1 + T_D \cdot s)$
PID-regulator på serieform med lågpasfilter på derivatadeln.	$G(s) = K \left(\frac{1 + T_I \cdot s}{T_I \cdot s} \right) \left(1 + \frac{T_D \cdot s}{1 + \alpha \cdot T_D \cdot s} \right)$

Laplaceformen

Definition på laplacetransformen

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

där $f(t)$ = tidsfunktion och $F(s)$ = transform

Tabell över de viktigaste laplacetransformerna

Laplaceform $F(s)$	Tidsfunktion $f(t)$ för $t > 0$
1	Impulsfunktion $\delta(t)$
$\frac{1}{s}$	Stegfunktion $\sigma(t)$
$\frac{1}{s^2}$	Rampfunktion t
$\frac{1}{s^3}$	$\frac{t^2}{2}$
$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}
$\frac{1}{(s+a)(s+b)}$	$\frac{e^{-at} - e^{-bt}}{b-a}$
$\frac{1}{s(1+as)}$	$1 - e^{-\frac{t}{a}}$
$\frac{1}{s(1+as)(1+bs)}$	$1 - \frac{a \cdot e^{-\frac{t}{a}}}{a-b} - \frac{b \cdot e^{-\frac{t}{b}}}{b-a}$
$\frac{1}{(s+a)(s+b)(s+c)}$	$\frac{e^{-at}}{(b-a)(c-a)} + \frac{e^{-bt}}{(c-b)(a-b)} + \frac{e^{-ct}}{(a-c)(b-c)}$
$\frac{s+a}{(s+b)(s+c)}$	$\frac{(a-b)e^{-bt} - (a-c)e^{-ct}}{c-b}$
$\frac{1}{(s+a)^2}$	$t \cdot e^{-at}$
$\frac{1}{s^2+a^2}$	$\frac{1}{a} \cdot \sin at$
$\frac{s}{s^2+a^2}$	$\cos at$
$\frac{1}{s(s^2+a^2)}$	$\frac{1}{a^2} [1 - \cos at]$
$\frac{1}{s^2(s^2+a^2)}$	$\frac{1}{a^3} [at - \sin at]$
$\frac{s+a}{(s+a)^2+b^2}$	$e^{-at} \cdot \cos bt$
$\frac{b}{(s+a)^2+b^2}$	$e^{-at} \cdot \sin bt$

Räkneregler för Laplacetransformen

Superpositionsregeln

$$L[af_1(t) + bf_2(t)] = aF_1(s) + bF_2(s)$$

Fördröjningssatsen

$$L[f(t - T)] = F(s) \cdot e^{-Ts}$$

Deriveringssatsen

$$L[f'(t)] = s \cdot F(s) - f(0)$$

Om $f(0) = f'(0) = f''(0) = 0$ erhålls

$$L[f'(t)] = s \cdot F(s)$$

$$L[f''(t)] = s^2 \cdot F(s)$$

$$L[f^{(3)}(t)] = s^3 \cdot F(s)$$

OSV

Integrationssatsen

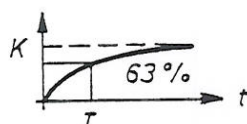
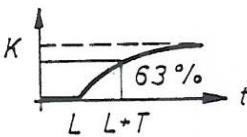
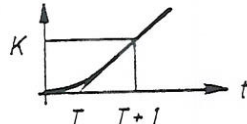
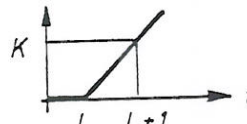
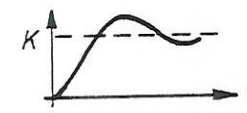
$$L\left[\int_0^t f(t) dt\right] = \frac{1}{s} F(s)$$

Begynnelse- och slutvärdessatserna

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot (F(s))$$

Derivator	Integraler	Fördröjningar
$\frac{dy}{dt} \Rightarrow s \cdot Y$ $\frac{d^2y}{dt^2} \Rightarrow s^2 Y$	$\int y(t) dt \Rightarrow \frac{Y}{s}$ $\iint y(t) dt \Rightarrow \frac{Y}{s^2}$	$u(t - T) \Rightarrow Ue^{-Ts}$

Typ av process	Överföringsfunktion	Stegsvar (vid enhetssteg)
Process med P-verkan	$G(s) = K$	
En tidskonstant	$G(s) = \frac{K}{1 + Ts}$	
En tidskonstant + dödtid	$G(s) = \frac{Ke^{-Ls}}{1 + Ts}$	
Integration	$G(s) = \frac{K}{s}$	
Integration + en tidskonstant	$G(s) = \frac{K}{s(1 + Ts)}$	
Integration + dödtid	$G(s) = \frac{K \cdot e^{-Ls}}{s}$	
Två tidskonstanter (se även nedan)	$G(s) = \frac{K}{(1 + T_1s)(1 + T_2s)}$	
Andra ordningens process med översväng (se även nedan)	$G(s) = \frac{K}{as^2 + bs + 1}$	

Andra ordningens system med komplexa rötter

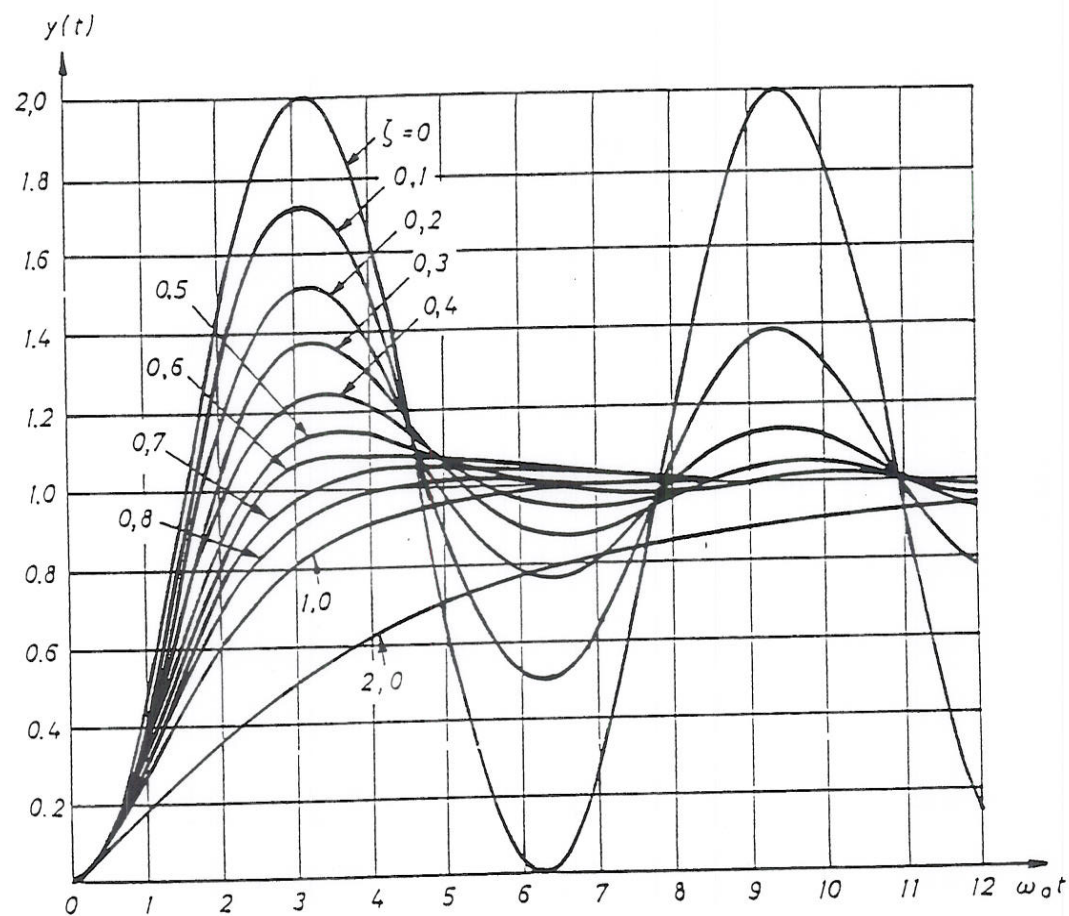
$$G(s) = \frac{K\omega_0^2}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2}$$

ω_0 = odämpade egensvängningen

ζ = relativa dämpningen

$$\text{Maximal översväng } M_p = 100 \% \cdot \exp \left[\frac{-\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}} \right]$$

$$\text{Tid för maximal översväng } t_p = \frac{\pi}{\omega_0 \sqrt{1-\zeta^2}}$$



Regel	Blockschema	Ekvivalent system
Seriekoppling		
Parallellkoppling		
Återkoppling (negativ och positiv)		

Matematiska modeller

Mekaniska system		Elektriska system	
Massa	$\sum F = M \frac{d^2 x}{dt^2}$ (Newtons andra lag)	Komplexa impedanser	
Fjäder	$F = kx$ (k = fjäderkonstanten)	Motstånd	$\frac{U}{I} = R$ (R = resistansen)
Dämpare	$F = b \frac{dx}{dt}$ (b = dämpkonstanten)	Kondensator	$\frac{U}{I} = \frac{1}{Cs}$ (C = kapacitansen)
		Spole	$\frac{U}{I} = Ls$ (L = induktansen)

Termiska processer

Energibalanslagen: $\frac{dE}{dt} = P_{in} - P_{ut}$

Värmeenergin hos ett system:

$$E = TVc\rho$$

där

T = temperaturen [K]

V = volymen [m^3]

c = värmekapacitiviteten [$J/K \cdot kg$]

ρ = densiteten [kg/m^3]

Nivåreglering

Materialbalanslagen: $\frac{dV}{dt} = u_{in} - u_{ut}$

där V = volymen [m^3]

u_{in} = inflödet [m^3/s]

u_{ut} = utflödet [m^3/s]

Materialbalans: $\frac{dM_p}{dt} = Qc_0 - Qc_1$

där M_p = total pulvermassa = $V \cdot c_1$

Q = flöde genom tanken [m^3/s]

c_0 = koncentration i inflödet [kg/m^3]

c_1 = koncentration i tanken och i utflödet [kg/m^3]

Frekvensanalys

Om insignalen till ett lineärt, stabilt system G är sinusformad med en viss frekvens ω , så kommer även utsignalen i stationärtillståndet att vara sinusformad med samma frekvens ω . Amplitudförstärkning A och fasvridning φ bestäms av funktionerna

$$A(\omega) = |G(j\omega)|$$

$$\varphi(\omega) = \angle G(j\omega)$$

Bodediagram för grundfaktorer

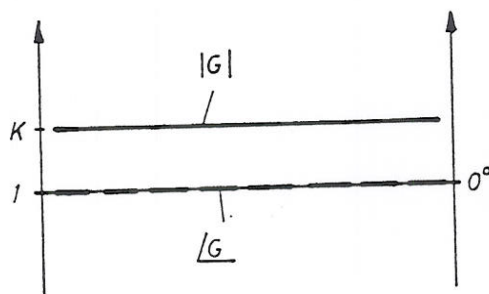
Konstant förstärkningsfaktor $G(s) = K$

Amplitudfunktion:

$$|G(\omega)| = K$$

Fasfunktion:

$$\angle G(\omega) = 0^\circ$$



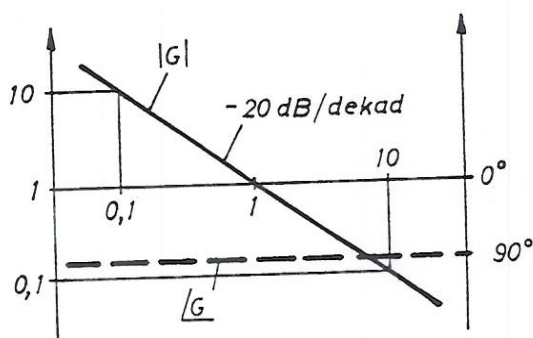
Integration $G(s) = 1/s$

Amplitudfunktion:

$$|G(\omega)| = \frac{1}{\omega}$$

Fasfunktion:

$$\angle G(\omega) = -90^\circ$$



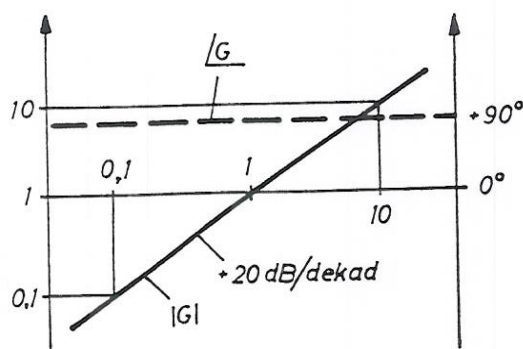
Derivering $G(s) = s$

Amplitudfunktion:

$$|G(\omega)| = \omega$$

Fasfunktion:

$$\angle G(\omega) = +90^\circ$$



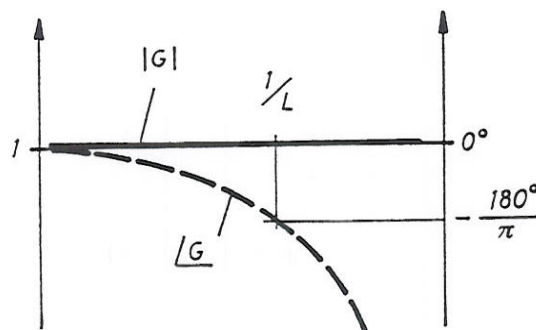
Dödtidsfaktor $G(s) = e^{-Ls}$

Amplitudfunktion:

$$|G(\omega)| = 1$$

Fasfunktion:

$$\angle G(\omega) = -\omega \left(\frac{180}{\pi} L \right)$$



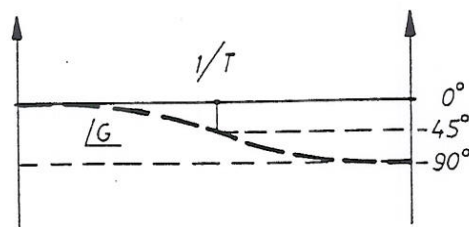
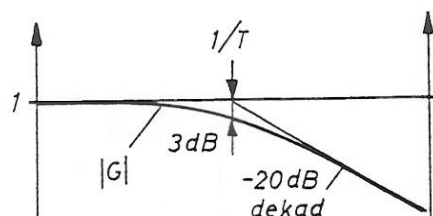
Förstgradsfaktor i nämnaren $G(s) = 1/(1 + Ts)$

Amplitudfunktion:

$$|G(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (T\omega)^2}}$$

Fasfunktion:

$$\angle G(\omega) = -\arctan(T\omega)$$



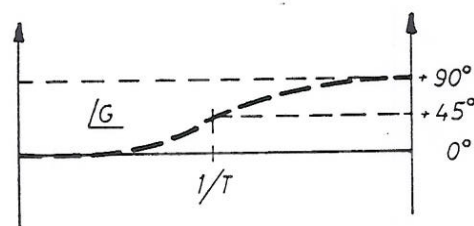
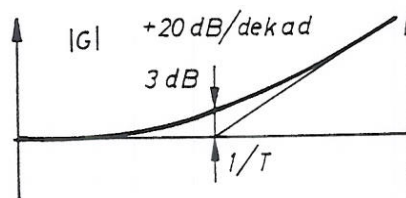
Förstgradsfaktor i täljaren $G(s) = 1 + Ts$

Amplitudfunktion:

$$|G(\omega)| = \sqrt{1 + (T\omega)^2}$$

Fasfunktion:

$$\angle G(\omega) = \arctan(T\omega)$$



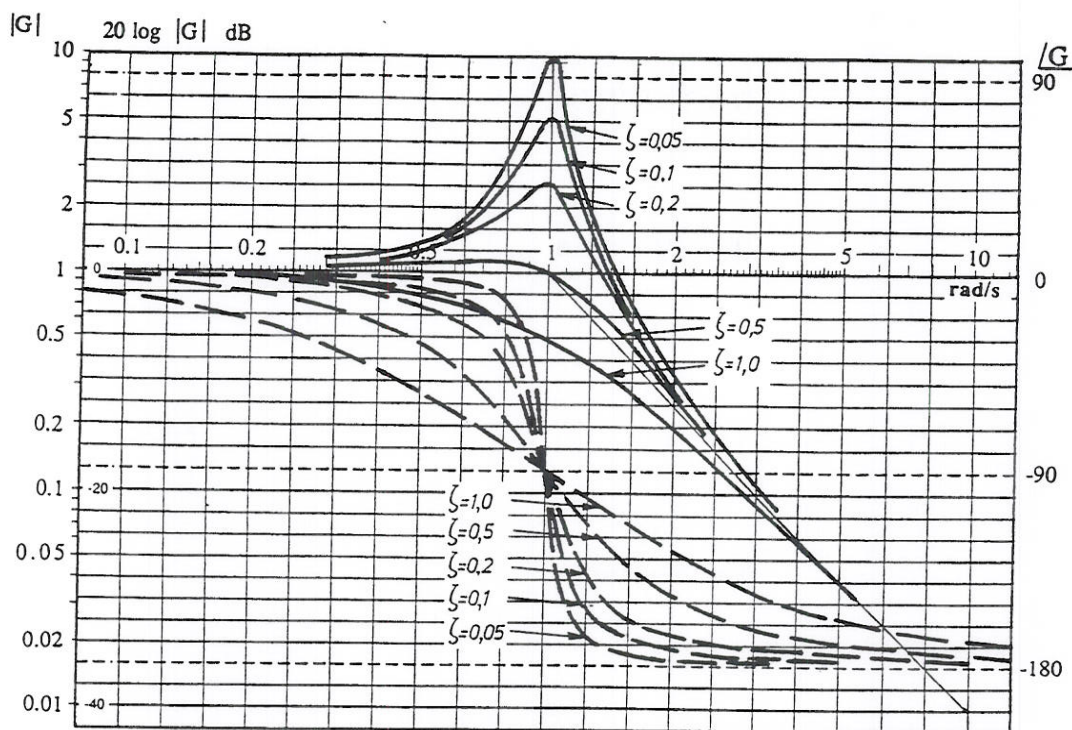
Andragsgradsfaktor i nämnaren $G(s) = \frac{1}{1 + 2\zeta Ts + T^2 s^2}$

Amplitudfunktion:

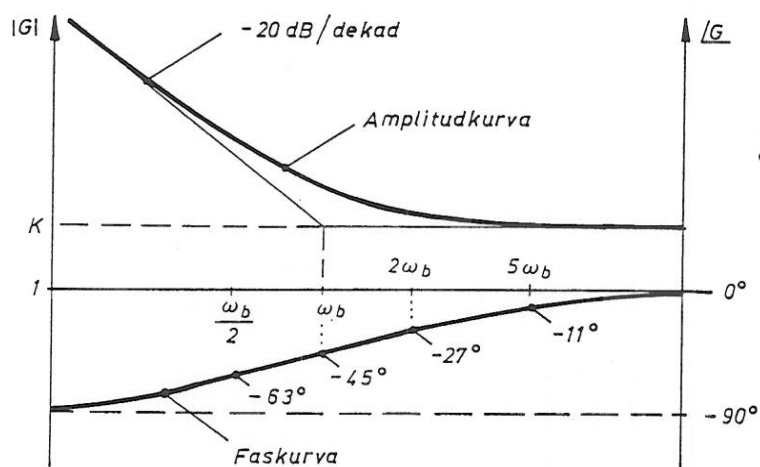
$$|G(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(1 - T^2\omega^2)^2 + (2\zeta T\omega)^2}}$$

Fasfunktion:

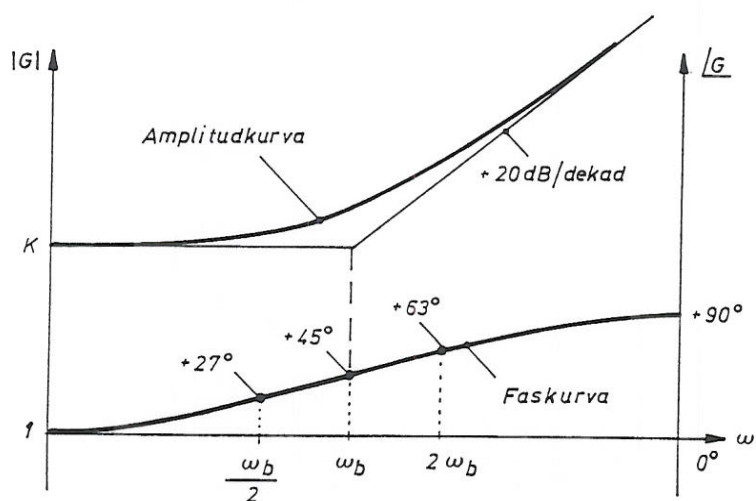
$$\angle G(\omega) = -\arctan\left(\frac{2\zeta T\omega}{1 - T^2\omega^2}\right)$$



PI- och PD-regulatorernas Bodediagram



PI-regulatorns Bodediagram



PD-regulatorns Bodediagram

Nyquists förenklade stabilitetskriterium

Ett återkopplat lineärt system är stabilt om amplitudförstärkningen hos kretsöverföringen $|G_K|$ är mindre än ett vid den frekvens där fasvridningen $\angle G_K$ är -180 grader. —

Kretsöverföringen $G_K = G_R G_P G_G$

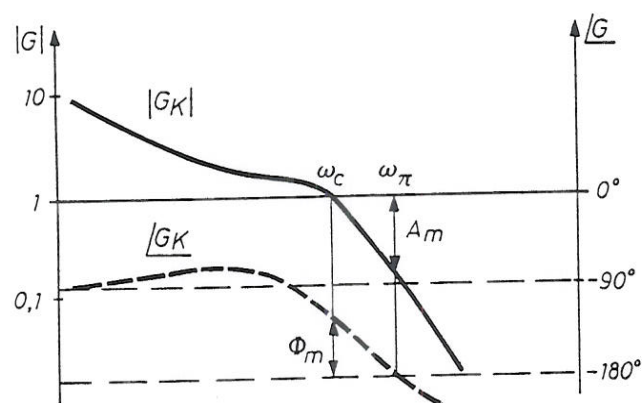
ω_π = Självsvängningsfrekvensen (den frekvens där $\angle G_K = -180^\circ$)

ω_c = Överkorsningsfrekvensen (den frekvens där $|G_K| = 1$)

A_m = Amplitudmarginalen $A_m = \frac{1}{|G_K(\omega_\pi)|}$

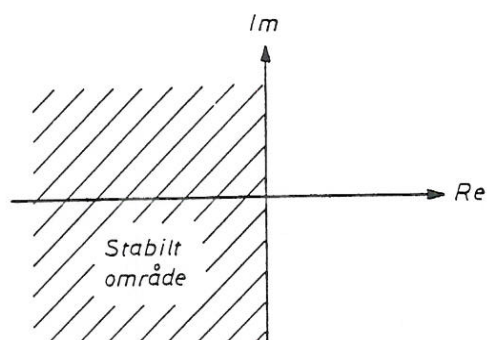
ϕ_m = Fasmarginalen $\phi_m = 180 + \angle G_K(\omega_c)$

Stabilitetsmarginaler ur Bodediagram för G_K



Algebraiskt stabilitetsvillkor

För att ett lineärt system $G(s) = B(s)/A(s)$ ska vara stabilt fordras att *samtliga* rötter till systemets karakteristiska ekvation $A(s) = 0$ (systemets *s* k *poler*) är belägna i den vänstra delen av det komplexa talplanet.



Rouths metod

Karakteristisk ekvation:

$$B_0 s^n + B_1 s^{n-1} + B_2 s^{n-2} + \dots + B_n = 0 \quad \text{där } B_0 > 0$$

Talschema:

s^n	B_0	B_2	B_4	B_6	$\dots$	där	$C_0 = \frac{B_1 B_2 - B_0 B_3}{B_1}$
s^{n-1}	B_1	B_3	B_5	B_7	$\dots$		$C_1 = \frac{B_1 B_4 - B_0 B_5}{B_1}$
							$C_2 = \frac{B_1 B_6 - B_0 B_7}{B_1}$
s^{n-2}	C_0	C_1	C_2	$\dots$			$D_0 = \frac{C_0 B_3 - B_1 C_1}{C_0}$
s^{n-3}	D_0	D_1	D_2	$\dots$			etc
$\vdots$	$\vdots$						
s^0							

Systemet är stabilt om alla koefficienter i den första kolumnen är positiva.

Kvarstående fel

(vid enhetsåterkopplade system, dvs $G_G = 1$)

- Vid *stegformade* börvärdesändringar $e_0 = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{a}{1 + G_P G_R}$
(a = steghöjden)
- Vid *rampformade* börvärdesändringar $e_1 = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{h}{s(1 + G_P G_R)}$
(h = rampens lutning)
- Vid *stegstörningar* $e_v = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{-G_P a}{1 + G_R G_P}$
(a = steghöjden)

Snabbhet

$$\text{Stigtiden } t_r \approx \frac{1,4}{\omega_c}$$

Regulatortyp	Parametrar		
	K	T_I	T_D
P-regulator	$0,5 K_o$	—	—
PI-regulator	$0,45 K_o$	$0,85 T_o$	—
PID-regulator	$0,6 K_o$	$0,5 T_o$	$0,125 T_o$

där

K_o = Den förstärkning som ger självsvängningar vid P-reglering

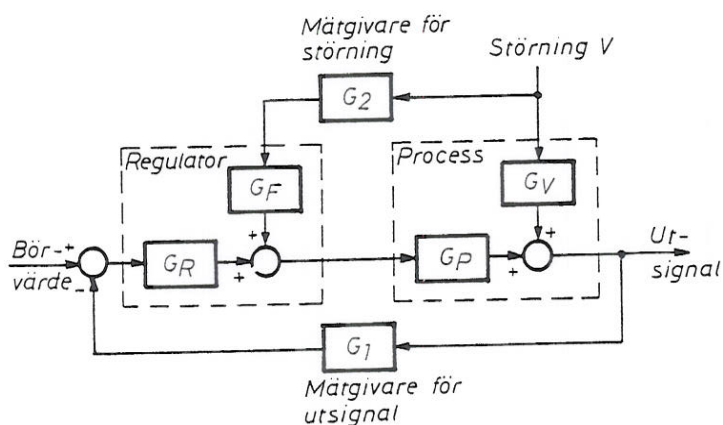
$$K_o = \frac{1}{|G_P(\omega_\pi)|}$$

och

T_o = Periodtiden för motsvarande svängningar

$$T_o = \frac{2\pi}{\omega_\pi}$$

Framkoppling



$$\text{Välj } G_F = \frac{-G_V}{G_2 G_P}$$

z-transformen

Definition på z-transformen

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k) z^{-k}$$

där $f(k)$ = tidsfunktion och $F(z)$ = transform

Tabell över de viktigaste z-transformerna

Tidsdiskret funktion $f(k)$ $k \geq 0$	z-transform $F(z)$	
	Positiv representation	Negativ representation
Enhetspuls $P_e(k)$	1	
Enhetssteg $S_e(k)$	$\frac{z}{z-1}$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$
Enhetsramp $f(k) = k$	$\frac{z}{(z-1)^2}$	$\frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$
Enhetsparabel $f(k) = k^2$	$\frac{z^2+z}{(z-1)^3}$	$\frac{z^{-1}+z^{-2}}{(1-z^{-1})^3}$
Exponentialfunktion $f(k) = a^k$	$\frac{z}{z-a}$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$
Fördröjd enhetspuls $P_e(k-L)$	$\frac{1}{z^L}$	z^{-L}
Fördröjt enhetssteg $S_e(k-L)$	$\frac{z^{1-L}}{z-1}$	$\frac{z^{-L}}{1-z^{-1}}$
e^{-ak}	$\frac{z}{z-e^{-a}}$	$\frac{1}{1-e^{-a}z^{-1}}$
$\sin \omega k$	$\frac{z \cdot \sin \omega}{z^2 - (2 \cos \omega)z + 1}$	$\frac{z^{-1} \sin \omega}{1 - (2 \cos \omega)z^{-1} + z^{-2}}$
$\cos \omega k$	$\frac{z(z - \cos \omega)}{z^2 - (2 \cos \omega)z + 1}$	$\frac{z^{-1}(1 - z^{-1} \cos \omega)}{1 - (2 \cos \omega)z^{-1} + z^{-2}}$
$1 - e^{-ak}$	$\frac{z(1 - e^{-a})}{(z-1)(z - e^{-a})}$	$\frac{(1 - e^{-a})z^{-1}}{(1 - z^{-1})(1 - e^{-a}z^{-1})}$

Räkneregler för z-transformen

Superpositionsregeln

$$Z[af_1(k) + bf_2(k)] = aF_1(z) + bF_2(z)$$

Fördröjningssatsen

$$Z[f(k-L)] = F(z) \cdot z^{-L}$$

Begynnelse- och slutvärdessatserna

$$f(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} F(z)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(k) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) F(z)$$

Steginvariant transform:

$$H(z) = (1 - z^{-1}) Z \left[L^{-1} \left(G(s) \cdot \frac{1}{s} \right)_{t=kh} \right]$$

Tabell för diskretisering

Tabell för diskretisering av kontinuerliga processer under antagande om styckvis konstant insignal. Samplingsintervallet = h . (Steginvariant transform)

Kontinuerlig process $G(s)$	Diskretiserad process $H(z)$
$\frac{K}{1 + Ts}$	$\frac{K(1 - e^{-h/T})}{z - e^{-h/T}} = \frac{K(1 - e^{-h/T})z^{-1}}{1 - e^{-h/T}z^{-1}}$
$\frac{K}{s}$	$\frac{K \cdot h}{z - 1} = \frac{K \cdot h \cdot z^{-1}}{1 - z^{-1}}$
e^{-hs}	z^{-1}
$\frac{K}{s(1 + Ts)}$	$KT \cdot \frac{(e^{-h/T} - 1 + \frac{h}{T})z^{-1} + (1 - e^{-h/T}(1 + \frac{h}{T}))z^{-2}}{1 - (1 + e^{-h/T})z^{-1} + e^{-h/T}z^{-2}}$
$\frac{K}{s^2 + a^2}$	$\frac{K(1 - \cos ah)}{a^2} \cdot \frac{(z^{-1} + z^{-2})}{(1 - 2 \cos ah z^{-1} + z^{-2})}$
$\frac{K}{s^2}$	$\frac{Kh^2}{2} \cdot \frac{(z^{-1} + z^{-2})}{(1 - 2 z^{-1} + z^{-2})}$

Lineär algebra – några formler

Multiplikation av 2×2 -matriser:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix}$$

Enhetsmatrisen:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Invertering av en 2×2 -matris:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} \cdot \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

Determinanten för en 2×2 -matris:

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

Invertering av en allmän matris:

$$A^{-1} = \frac{C^T}{\det A}$$

där elementen i C-matrisen bestäms av $C_{ij} = (-1)^{i+j} \det M_{ij}$ och där M_{ij} är den matris som erhålls då rad i och kolumn j i A-matrisen stryks.

Minsta kvadratmetoden

Överbestämt ekvationssystem

$$y = A \cdot r$$

"Felutjämnat" ekvationssystem

$$A^T y = (A^T A) r$$

Lösning

$$r = (A^T A)^{-1} A^T y$$

där

y = utsignalvektorn

A = mätdata-matrisen

r = parametervektorn

Frekvensanalys

Om insignalen till ett lineärt, stabilt tidsdiskret system $H(z)$ är sinusformad med viss frekvens ω , blir även utsignalen sinusformad med samma frekvens ω . Amplitudförstärkning A och fasvridning φ bestäms av funktionerna:

$$A(\omega) = |H(e^{j\omega h})| \quad \varphi(\omega) = \angle H(e^{j\omega h})$$

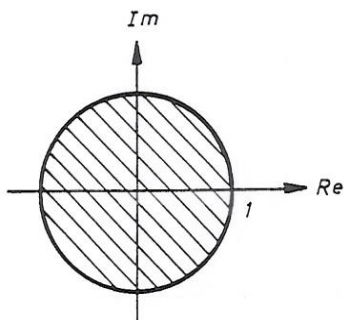
Lågfrekvensförstärkning $K_{LF} = H(1)$

Aliaseffekten inträffar om samplingsfrekvensen f_s är lägre än dubbla insignalfrekvensen f .

$$f_s < 2f$$

Stabilitet

För stabilitet hos ett tidsdiskret system $H(z) = B(z)/A(z)$ krävs att samtliga poler är belägna inom enhetscirkeln:



Karakteristiskt polynom $A(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$

där $a_0 > 0$.

$$b_i = a_0 a_i - a_n a_{n-i} \quad \text{för } 0 \leq i \leq n-1$$

$$c_i = b_0 b_i - b_{n-1} b_{n-1-i} \quad \text{för } 0 \leq i \leq n-2$$

$$d_i = c_0 c_i - c_{n-2} c_{n-2-i} \quad \text{för } 0 \leq i \leq n-3$$

etc

Systemet är stabilt om och endast om:

$$a_0 > 0, b_0 > 0, c_0 > 0, \dots$$

Kvarstående fel

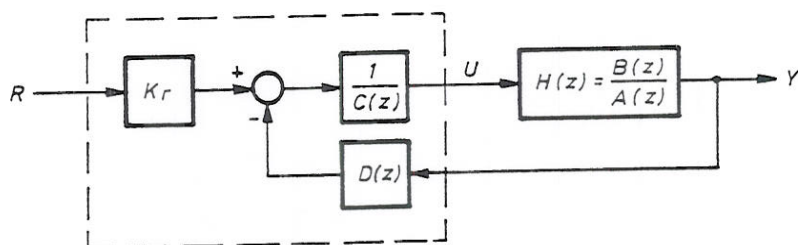
(vid enhetsåterkopplade system)

- Vid stegformade börvärdesändringar $e_0 = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{a}{1 + H_R H_P}$
(a = steghöjden)

- Vid rampformade börvärdesändringar $e_1 = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{h}{(z-1)(1 + H_R H_P)}$
(h = rampens lutning)

- Vid stegstörningar $e_v = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{-H_P a}{1 + H_R H_P}$
(a = steghöjden)

Polplacering



Gradtalsregler $n_p \leq n_a + n_b - 1$

$$n_c = n_b - 1$$

$$n_d = n_a - 1$$

(Obs! Vid negativ representation)

$$C(z) = 1 + c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2} + \dots + c_{n_c} z^{-n_c}$$

$$D(z) = d_0 + d_1 z^{-1} + d_2 z^{-2} + \dots + d_{n_d} z^{-n_d}$$

Önskat karakteristiskt polynom

$$P(z) = (1 - p_1 z^{-1})(1 - p_2 z^{-1}) \dots (1 - p_n z^{-1})$$

Polplaceringsekvationen

$$A(z) C(z) + B(z) D(z) = P(z)$$

Om integralverkan används så ska faktorn $(1 - z^{-1})$ ingå i C-polynomet. Vid beräkningarna av gradtal ska integralfaktorn dock ingå i A-polynomet.

$$\text{Börvärdesfaktorn } K_r = \frac{P(1)}{B(1)}$$

Kompletterande formler- tillståndsmodeller mm

Grundläggande lag för roterande system

$$\sum M = J \cdot \ddot{\Theta}$$

där $\sum M$ = summan av alla vridande moment (Nm)
 J = tröghetsmomentet (kgm^2)
 $\ddot{\Theta}$ = vinkelaccelerationen (rad/s^2)

Värmeförlust genom vägg

$$P_{UT} = k(T_2 - T_1),$$

där k = värmegenomgångstalet (J/Ks), P_{UT} = värmeförlusten (W)

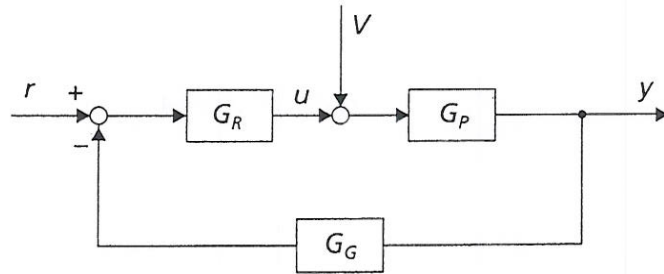
Formel för beräkning av k

$$k = \frac{A \cdot \lambda}{x} \quad \text{där } A = \text{arean på väggen (m}^2\text{)}, \lambda = \text{värmekonduktiviteten (J/Ksm) och } x = \text{väggens tjocklek (m)}$$

Värmekonduktiviteten = mått på hur bra ett ämne leder värme. Hittas i fysikaliska tabeller. Exempel:

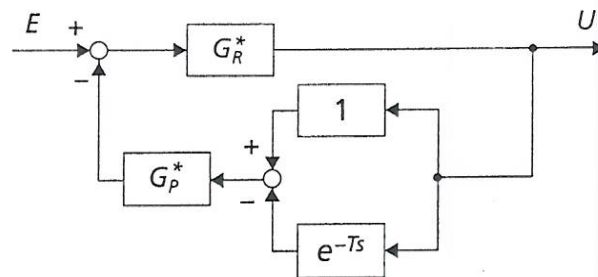
Stål	$\lambda = 45 \text{ J/Ksm}$
Glas	$\lambda = 0,93 \text{ J/Ksm}$
Furu	$\lambda = 0,35 \text{ J/Ksm}$
Luft	$\lambda = 0,025 \text{ J/Ksm}$ (gäller stillastående luft)

Modellbaserad dimensionering



$$G_{TOT} = \frac{G_R \cdot G_P}{1 + G_R G_P G_G} \Rightarrow G_R = \frac{G_{TOT}}{G_P (1 - G_G G_{TOT})}$$

Otto-Smith-regulatorn



där

G_R^* = regulator dimensionerad för den dödtidsfria processen.

G_P^* = modell av process som ska regleras, med dödtiden borttagen.

Digital implementering av analoga regulatorer

Steginvariant transform

$$H(z) = (1 - z^{-1})Z \left[L^{-1} \left(\frac{G(s)}{s} \right)_{t=kh} \right]$$

Rampinvariant transform

$$H(z) = \frac{(z-1)^2}{hz} \cdot Z \left[L^{-1} \left(\frac{G(s)}{s^2} \right)_{t=kh} \right]$$

Bilineär transform (även kallad Tustins metod)

$$s = \frac{2(z-1)}{h(z+1)}$$

Euler-transformen (Euler-bakått)

$$s = \frac{(z-1)}{zh}$$

Tillståndsmodeller

Allmänna tidskontinuerliga system

Tillståndet hos ett system definieras som den information som behövs om ett system (vid tidpunkten noll) för att tillsammans med senare insignaler kunna beräkna systemets framtida beteende.

Ett allmänt system kan beskrivas på tillståndsform:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x, u, t) \\ y(t) = g(x, u, t) \end{cases} \quad (1)$$

där f och g är godtyckliga funktioner, x är en n -kolonnvektor kallad tillståndsvektorn, u är en m -kolonnvektor (insignalvektor) och y är en k -kolonnvektor (utsignalvektor). Ett system är av n :te ordningen om tillståndsvektorn har n komponenter.

Lineära tidskontinuerliga system

Grundekvationer

För lineära system gäller:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax + Bu \\ y(t) = Cx + Du \end{cases}$$

med matriserna A , B , C , D av dimensionerna $(n \times n)$, $(n \times m)$, $(k \times n)$ och $(k \times m)$.

Karakteristisk ekvation

$$\det(sI - A) = 0$$

Tillståndsmodell till överföringsfunktion

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

Linearisering

Linearisering av ett allmänt olineärt system (1) kring den stationära punkten x_0, y_0, u_0 :

$$\begin{cases} \Delta \dot{x} = A \Delta x + B \Delta u \\ \Delta y = C \Delta x + D \Delta u \end{cases} \quad \text{där} \quad \begin{aligned} A &= \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x_0, y_0} & B &= \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{x_0, y_0} \\ C &= \left. \frac{\partial g}{\partial x} \right|_{x_0, y_0} & D &= \left. \frac{\partial g}{\partial u} \right|_{x_0, y_0} \end{aligned}$$

Byte av koordinater

Låt $z = Tx$. Då fås:

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = TAT^{-1}z + TBu \\ y(t) = CT^{-1}z + Du \end{cases}$$

Överföringsfunktion till tillståndsmodell

Ett dynamiskt system med överföringsfunktionen

$$G(s) = \frac{b_1 s^{n-1} + b_2 s^{n-2} + \dots + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n} + D$$

kan alltid skrivas på följande tillståndsformer:

Styrbar kanonisk form

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} & -a_n \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot u$$

$$y = [b_1 \quad b_2 \quad \dots \quad b_n] \cdot x$$

Observerbar kanonisk form

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -a_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{n-1} & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \cdot x + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{bmatrix} \cdot u$$

$$y = [1 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad 0] \cdot x$$

Diagonalform

Om överföringsfunktionen kan partialbråksuppdelas i en summa av första ordningens överföringsfunktioner (se nedan), dvs om systemet har reella enkelpoler, kan det också skrivas på diagonalform enligt följande:

$$G(s) = \frac{\beta_1 \gamma_1}{s - \lambda_1} + \frac{\beta_2 \gamma_2}{s - \lambda_2} + \dots + \frac{\beta_n \gamma_n}{s - \lambda_n} + D$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & \lambda_n \end{bmatrix} \cdot x + \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} \cdot u$$

$$y = [\gamma_1 \quad \gamma_2 \quad \dots \quad \gamma_n] \cdot x + Du$$

Systemets karakteristiska ekvation, liksom dess överföringsfunktion, är invariant under koordinatbyte.

Tillståndåterkoppling

Allmänt

$$\text{Om systemet} \quad \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

återkopplas med regulatorn $u = -Lx + K_r r$

$$\text{erhålls det slutna systemet} \quad \begin{cases} \dot{x} = (A - BL)x + BK_r r \\ y = Cx \end{cases}$$

Om systemet är styrbart kan man välja L så att det slutna systemet får önskad polplacering. Börvärdesfaktorn K_r väljes därefter normalt så att det totala systemets lågfrekvensförstärkning blir ett, vilket kräver:

$$K_r = (C(BL - A)^{-1}B)^{-1}$$

Styrbarhetsmatrisen

$$S = [B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{n-1}B]$$

Systemet är styrbart om matrisen S har full rang, dvs $\text{rang}(S) = n$, där n är systemets ordning.

Observerbarhetsmatrisen

$$O = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

Systemet är observerbart om matrisen O har full rang, dvs om $\text{rang}(O) = n$, där n är systemets ordning.

Tillståndskonstruktion

För ett tidskontinuerligt system med mätsignalen y :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

kan tillståndsvektorn $x(t)$ skattas med observatören

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x}(t) + Bu(t) + K[y(t) - C\hat{x}(t)]$$

För observationsfelet $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ gäller vid avsaknad av störningar

$$\dot{e}(t) = (A - KC)e(t)$$

Observatördynamiken bestäms av egenvärdena till matrisen $(A - KC)$. Om systemet är observerbart kan observatören dimensioneras genom att välja K så att matrisen $(A - KC)$ får lämpliga poler.

Multivariabel reglering

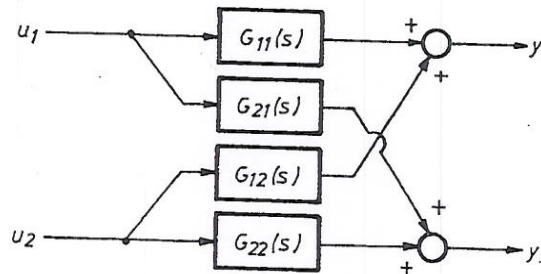
Process med två in- och två utsignaler

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}$$

Mått på interaktionen

$$J_{max} = \max_{0 < \omega < \infty} |J(j\omega)|$$

$$\text{där } J(j\omega) = \frac{G_{12}(j\omega) \cdot G_{21}(j\omega)}{G_{11}(j\omega) \cdot G_{22}(j\omega)}$$



Statiskt särkopplingsfilter

$$P_{stat} = \begin{bmatrix} G_{11}(0) & G_{12}(0) \\ G_{21}(0) & G_{22}(0) \end{bmatrix}^{-1}$$

Återkopplat multivariabelt system

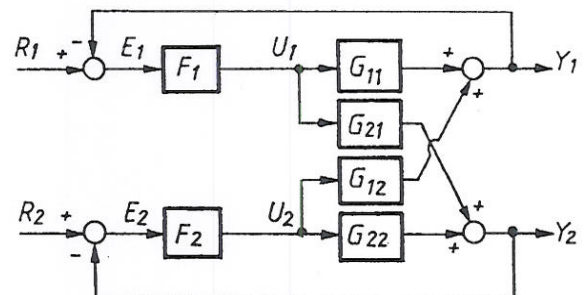
Definitioner

$$R = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} \quad Y = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix}$$

$$F = \begin{bmatrix} F_1 & 0 \\ 0 & F_2 \end{bmatrix} \quad G = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix}$$

Total matris-överföringsfunktion

$$H_{tot} = \frac{Y}{R} = (I + GF)^{-1} GF$$



Överföringsfunktion på komponentform

$$H_{tot} = \frac{1}{N} \begin{bmatrix} F_1(G_{11} + F_2(G_{11}G_{22} - G_{12}G_{21})) & F_2G_{12} \\ F_1G_{21} & F_2(G_{22} + F_1(G_{11}G_{22} - G_{12}G_{21})) \end{bmatrix}$$

$$\text{där } N = (I + G_{11}F_1)(I + G_{22}F_2) - G_{12}G_{21}F_1F_2 =$$

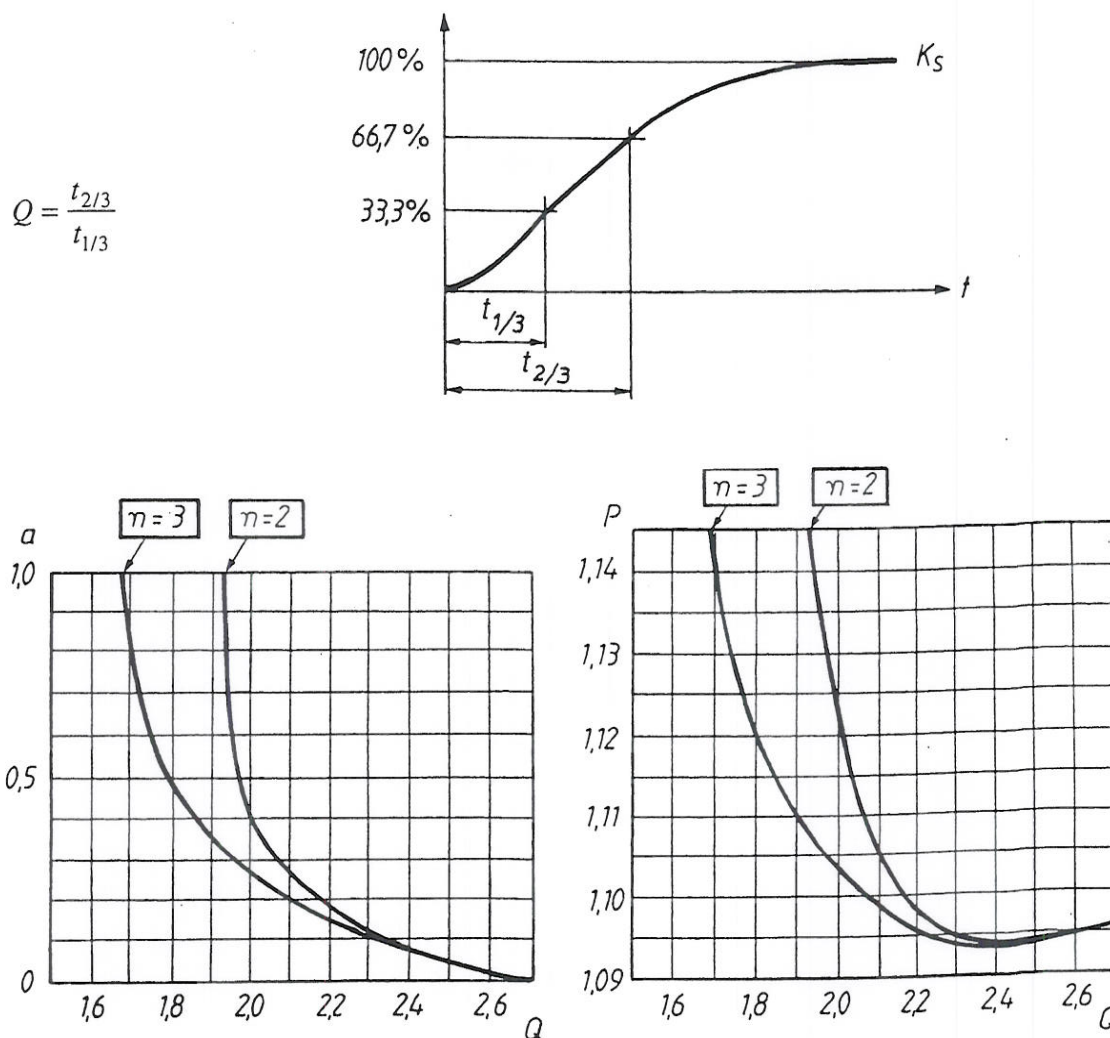
Karakteristisk ekvation

$$(I + G_{11}F_1)(I + G_{22}F_2) - G_{12}G_{21}F_1F_2 = 0$$

Stegvarsanalys

Process med s-format monotont stegsvar

Det förekommer att man känner stegsvaret för en process – se exempel i vidstående figur – och man vill ha en så enkel matematisk modell som möjligt. Om modellen kan bestå av endast två tidskonstanter, som här kallas T och aT , kan man bestämma överföringsfunktionen med hjälp av slutvärdet samt tidpunkterna när $1/3$, respektive $2/3$ av slutvärdet uppnåts. Man utnyttjar då framtagna diagram, där man får fram dels a , dels en storhet P som ingår i värdet av T . Diagrammen bygger på storheten Q som är kvoten mellan $t_{2/3}$ och $t_{1/3}$.



Vid process med två tidskonstanter:
$$\begin{cases} T = \frac{t_{2/3}}{P(1+a)} \\ G(s) = \frac{K_s}{(1+Ts)(1+aTs)} \end{cases}$$

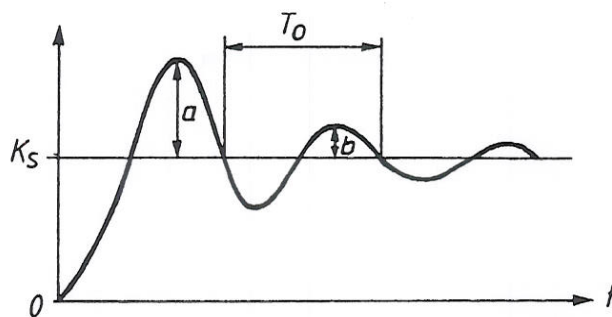
Om diagrammen visar att det inte räcker med två tidskonstanter kan man få en bra modell om man räknar med tre tidskonstanter, varvid dessa här valts till T , aT och a^2T . Följande formler gäller då:

Vid process med tre tidskonstanter:
$$\begin{cases} T = \frac{t_{2/3}}{P(1+a+a^2)} \\ G(s) = \frac{K_s}{(1+Ts)(1+aTs)(1+a^2Ts)} \end{cases}$$

Andra ordningens process med översväng

- 1) Bestäm parametrarna K_S , T_0 och d med hjälp av stegsvaret (antag att insignalstegets höjd = 1):

$$d = \frac{b}{a}$$

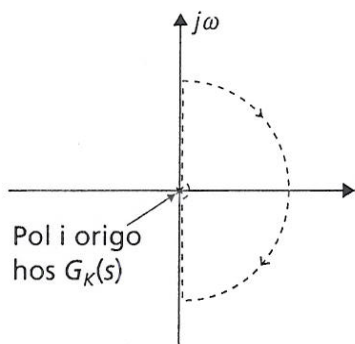


- 2) Bestäm den relativa dämpningen ζ och odämpade egenfrekvensen ω_0 med hjälp av nedanstående formler, och därefter överföringsfunktionen $G(s)$.

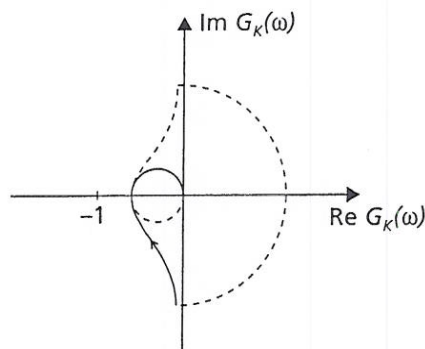
$$\begin{cases} \zeta = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{2\pi}{\ln d}\right)^2 + 1}} \\ \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0 \sqrt{1 - \zeta^2}} \end{cases} \Rightarrow G(s) = \frac{K_S \omega_0^2}{s^2 + 2\zeta \omega_0 s + \omega_0^2}$$

Fullständiga Nyquistkriteriet

För att undersöka om den karakteristiska ekvationen $1 + G_R G_P G_G = 0$ har några nollställen i högra halvplanet, dvs om det återkopplade systemet är instabilt, undersöks argumentvariationen för kretsöverföringen $G_K = G_R G_P G_G$ längs den s k Nyquistkonturen.



Nyquistkontur i komplexa talplanet.



Nyquistdiagram = Avbildningen $\omega \rightarrow G_K(j\omega)$ längs Nyquists kontur i s-planet.

Stabilitetsvillkor:

Låt: Z = antalet nollställen i HHP hos $1 + G_K$.

P = antalet poler i HHP hos G_K .

N = antal medurs omslingringar kring punkten $(-1,0)$

Då gäller att $Z = P + N$, dvs det återkopplade systemet är stabilt om $N + P = 0$.

Kommentar: Eventuella poler på imaginäraxeln för G_K kringgås med halvcirklar vars radie går mot noll.

Multivariabel reglering – Extra formler

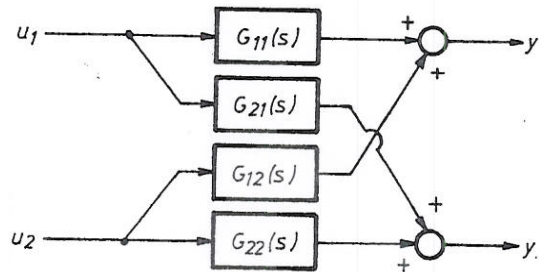
Process med två in- och två utsignaler

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}$$

Mått på interaktionen

$$J_{max} = \max_{0 < \omega < \infty} |J(j\omega)|$$

$$\text{där } J(j\omega) = \frac{G_{12}(j\omega) \cdot G_{21}(j\omega)}{G_{11}(j\omega) \cdot G_{22}(j\omega)}$$



Särkopplingsfilter

$$P_{stat} = \begin{bmatrix} G_{11}(0) & G_{12}(0) \\ G_{21}(0) & G_{22}(0) \end{bmatrix}^{-1}$$

Återkopplat multivariabelt system

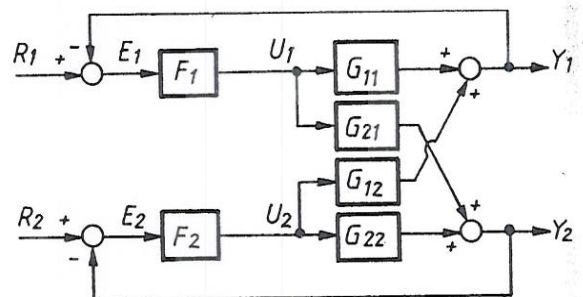
Definitioner

$$R = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} \quad Y = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix}$$

$$F = \begin{bmatrix} F_1 & 0 \\ 0 & F_2 \end{bmatrix} \quad G = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix}$$

Total matris-överföringsfunktion

$$H_{tot} = \frac{Y}{R} = (I + GF)^{-1}GF$$



Överföringsfunktion på komponentform

$$H_{tot} = \frac{1}{N} \begin{bmatrix} F_1(G_{11} + F_2(G_{11}G_{22} - G_{12}G_{21})) & F_2G_{12} \\ F_1G_{21} & F_2(G_{22} + F_1(G_{11}G_{22} - G_{12}G_{21})) \end{bmatrix}$$

$$\text{där } N = (I + G_{11}F_1)(I + G_{22}F_2) - G_{12}G_{21}F_1F_2 =$$

Karakteristisk ekvation

$$(I + G_{11}F_1)(I + G_{22}F_2) - G_{12}G_{21}F_1F_2 = 0$$