

Formelsamling Linjära system

Fouriertransformen

Funktionen $f(t)$ är reellvärd och periodisk med perioden T och därmed grundvinkelfrekvensen ω_0 som ges av $\omega_0 T = 2\pi$

Analoga signaler

PERIODISKA EFFEKTSIGNALER

KOMPLEX FOURIERSERIE

En periodisk signal $f(t)$ med perioden T kan skrivas

$$f(t) = c_0 + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t} \quad \text{där} \quad c_0 = \frac{1}{T} \cdot \int_{1 \text{ period}} f(t) dt, \quad c_k = \frac{1}{T} \cdot \int_{1 \text{ period}} f(t) \cdot e^{-jk\omega_0 t} dt \quad k \neq 0$$

och $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$.

REELL FOURIERSERIE

En periodisk signal $f(t)$ med perioden T kan skrivas

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega_0 t + b_k \sin k\omega_0 t), \quad \text{där} \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}.$$

KOEFFICIENTSAMBAND:

$$a_0 = c_0 \quad 2c_k = a_k - j b_k \quad \text{så att} \quad a_k = 2 \operatorname{Re} c_k \quad b_k = -2 \operatorname{Im} c_k \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

ENERGISIGNALER

Funktionen $f(t)$ är reellvärd och absolut integrerbar:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad \text{där} \quad F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

Parsevals formel:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega$$

Diskreta signaler

$\{x[n]\}$ är en tidsdiskret funktion (signal) som uppstår när $x(t)$ samplas med frekvensen f_s .

De diskreta tidpunkterna ges av $t = n \cdot T_s$

Den normerade vinkelfrekvensen ges av $\Omega = 2\pi \frac{f}{f_s} = \omega T_s$, där f och ω är frekvens resp. vinkelfrekvens hos $x(t)$.

Energisignal:
$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\Omega n} \quad x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_a^{a+2\pi} X(\Omega) e^{j\Omega n} d\Omega$$

Periodisk effektsignal:

$x[n]$ är en periodisk effektsignal samplad N gånger per period, så att $T = N \cdot T_s$, där T är periodtiden hos den signal $x(t)$ som samplas.

Fourierkoefficienterna ges av $c_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-jk\Omega_0 n}$, där $\Omega_0 = \frac{2\pi}{N}$ $k = 0, 1, 2, \dots, N-1$

Fourierserien ges av $x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{jk\Omega_0 n}$, där $\Omega_0 = \frac{2\pi}{N}$.

N = signalens period (antal sampel per period)

Diskret fouriertransform, DFT

Den diskreta Fouriertransformen $Y[k]$ för en signal $y[n]$ definieras som

$$Y[k] = \sum_{n=0}^{N-1} y[n] \cdot W_N^{kn}, \quad \text{där } W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}} \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

Signalen $y[n]$ kan återvinnas ur sin DFT $Y[k]$ enligt

$$y[n] = \frac{1}{N} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} Y[k] \cdot W_N^{-kn}, \quad \text{där } W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}} \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

Laplacetransformen

Definition: $F(s) = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-st} dt$

Tidsfunktion	Transformuttryck
$\delta(t)$	1
$\sigma(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$	$\frac{1}{s}$
A (konstant)	$\frac{A}{s}$
$r(t) = t \cdot \sigma(t)$	$\frac{1}{s^2}$
$t^n, \quad n \geq 1$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{s + \alpha}$
$e^{-\alpha t} \cdot t^n, \quad n \geq 1$	$\frac{n!}{(s + \alpha)^{n+1}}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
$f'(t)$	$s \cdot F(s) - f(0)$
$f''(t)$	$s^2 \cdot F(s) - s \cdot f(0) - f'(0)$
$\int_0^t f(\tau) d\tau$	$\frac{1}{s} \cdot F(s)$
$e^{-\alpha t} \cdot f(t)$	$F(s + \alpha)$ Dämpningssatsen
$f(t - T) \cdot \sigma(t - T)$	$e^{-sT} \cdot F(s)$ Fördröjningssatsen

INVERTERINGSSATSERNA

Vi betraktar rationella uttryck av typen $F(s) = T(s)/N(s)$, där $\text{grad}T(s) < \text{grad}N(s)$

1.

En enkelpol $s = a$ till en rationell laplacetransform $F(s) = T(s)/N(s)$ ger vid inverstransformering upphov till en term $A \cdot e^{at}$, där konstanten A kan beräknas enligt formeln

$$A = \left[\frac{T(s)}{N'(s)} \right]_{s=a} \quad \text{där} \quad N'(s) = \frac{dN(s)}{ds}$$

2.

En pol $s=a$ av multipliciteten n till en rationell laplacetransform $F(s) = T(s)/N(s)$ ger vid inverstransformering upphov till en term $f_1(t)$ i tidsuttrycket som kan beräknas enligt följande formel:

$$f_1(t) = \frac{1}{(n-1)!} \cdot \left[\frac{d^{n-1}}{ds^{n-1}} \left\{ (s-a)^n \cdot F(s) \cdot e^{st} \right\} \right]_{s=a}$$

3.

Ett komplexkonjugerat polpar $s = \alpha \pm j\omega$ av multipliciteten 1 till en rationell laplacetransform $F(s) = T(s)/N(s)$ ger vid inverstransformering upphov till en term $A \cdot e^{\alpha t} \cdot \cos(\omega t + \varphi)$, där de reella konstanterna A och φ kan bestämmas med hjälp av följande samband:

$$Ae^{j\varphi} = 2 \cdot \left[\frac{T(s)}{N'(s)} \right]_{s=\alpha+j\omega}$$

BEGYNNELSEVÄRDESSATSEN

Om $\text{grad}T(s) < \text{grad}N(s)$ gäller $\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot F(s)$

SLUTVÄRDESSATSEN

Om alla poler till $s \cdot F(s)$ ligger i det vänstra komplexa halvplanet, gäller

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0^+} s \cdot F(s)$$

z-transformen

Definition: $X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n] \cdot z^{-n}$

$\{x[n]\}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$	$X(z)$
$\{\delta[n]\}$	1
$\{\sigma[n]\} = \{1\}$	$\frac{z}{z-1}$
$r[n] = n \cdot \sigma[n]$	$\frac{z}{(z-1)^2}$
$\{a^n\}$	$\frac{z}{z-a}$
$\{e^{cn}\}$	$\frac{z}{z-e^c}$
$\{a^n \cdot n\}$	$\frac{az}{(z-a)^2}$
$\{a^n \cdot n^2\}$	$\frac{a(z+a)z}{(z-a)^3}$
$\{\sin[n\Omega]\}$	$\frac{z \cdot \sin \Omega}{z^2 - (2 \cos \Omega) \cdot z + 1}$
$\{\cos[n\Omega]\}$	$\frac{z \cdot (z - \cos \Omega)}{z^2 - (2 \cos \Omega) \cdot z + 1}$
$\{a^n \sin[n\Omega]\}$	$\frac{z \cdot a \sin \Omega}{z^2 - (2a \cos \Omega) \cdot z + a^2}$
$\{a^n \cos[n\Omega]\}$	$\frac{z \cdot (z - a \cos \Omega)}{z^2 - (2a \cos \Omega) \cdot z + a^2}$

Dämpningssatsen:

Om $\{x[n] \cdot \sigma[n]\} \supset X(z)$ så gäller $\{a^n x[n] \cdot \sigma[n]\} \supset X\left(\frac{z}{a}\right)$

Translation framåt (Fördröjningssatsen):

Om $\{x[n] \cdot \sigma[n]\} \supset X(z)$ så gäller $\{x[n-N] \cdot \sigma[n-N]\} \supset z^{-N} \cdot X(z)$

Translation bakåt:

Om $\{x[n] \cdot \sigma[n]\} \supset X(z)$ så gäller

$$\{x[n+N] \cdot \sigma[n]\} \supset z^N \cdot X(z) - z^N \cdot x[0] - z^{N-1} \cdot x[1] - \dots - z^1 \cdot x[N-1]$$

INVERTERINGSSATSERNA

Satserna avser bestämning av tidfunktionen $\{x[n]\}$ svarande mot transformen

$$X(z) = z \cdot \frac{T(z)}{N(z)}$$

där $T(z)$ och $N(z)$ är polynom med reella koefficienter och där $\text{grad } T(z) < \text{grad } N(z)$.

Satserna avser vidare det fall att polerna är av multipliciteten 1.

1.

Om $z = c$ är en *enkelpol*, reell eller komplex, till transformen ovan ger denna som bidrag vid inverstransformeringen en term i den tiddiskreta funktionen $\{x[n]\}$ av formen $\{Kc^n\}$

där konstanten K kan bestämmas enligt formeln

$$K = \left[\frac{T(z)}{N'(z)} \right]_{z=c} = \frac{T(c)}{N'(c)}$$

2.

Om $z = a$ är en reell **multipl** med multipliciteten m kommer $x[n]$ att innehålla termen

$$x[n] = \frac{1}{(m-1)!} \left[\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left\{ (z-a)^m \frac{T(z)}{N(z)} z^n \right\} \right]_{z=a}.$$

3.

Om $z_1 = a + jb = re^{j\Omega}$ och $z_2 = a - jb = re^{-j\Omega}$ är ett *komplexkonjugerat polpar* till transformen $X(z)$ ovan ger detta polpar som bidrag vid inverstransformeringen en term i den tiddiskreta funktionen $\{x[n]\}$ av formen $\{A r^n \cos(\Omega n + \varphi)\}$

där konstanterna A och φ kan bestämmas enligt formeln

$$A e^{j\varphi} = 2 \left[\frac{T(z)}{N'(z)} \right]_{z=a+jb} = 2 \cdot \frac{T(a+jb)}{N'(a+jb)}$$

GRÄNSVÄRDESSATSERNA

Begynnelsevärdessatsen: $x[0] = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$

Slutvärdessatsen: Om $\lim_{n \rightarrow \infty} x[n]$ existerar,
så gäller
$$\lim_{n \rightarrow \infty} x[n] = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \cdot X(z)$$

Komplettering till bokens formelsamling

Komplexa tal

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \qquad \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha \qquad \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha) \qquad \cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha)$$

$$e^{j\alpha} = \cos \alpha + j \cdot \sin \alpha \qquad e^{\pm jn\pi} = \cos(\pm n\pi) = (-1)^n$$

$$\cos \alpha = \frac{e^{j\alpha} + e^{-j\alpha}}{2} \qquad \sin \alpha = \frac{e^{j\alpha} - e^{-j\alpha}}{2j}$$

Rektangulär form: $z = x + jy$ $x = r \cos \varphi$ och $y = r \sin \varphi$

Polär form: $z = r \cdot e^{j\varphi}$ $\tan \varphi = \frac{y}{x}$ och $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

Eulers formel $e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \cdot \sin \omega t$

Speciellt: $\frac{1}{j} = -j$ $j = e^{j90^\circ}$ $\frac{1}{j} = e^{-j90^\circ}$

Polär $\rightarrow$ Rektangulär: $z = r \cdot e^{j\varphi} = a + jb$, där $a = r \cos \varphi$ $b = r \sin \varphi$

Rektangulär $\rightarrow$ Polär: $z = a + jb = |z| \cdot e^{j\varphi}$, där $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ där

$$\arg z = \varphi = \begin{cases} \varphi = \arctan \frac{b}{a} & a > 0 \quad b > 0 \quad 1: \text{a kvadranten} \\ \varphi = 180^\circ - \arctan \left| \frac{b}{a} \right| & a < 0 \quad b > 0 \quad 2: \text{a kvadranten} \\ \varphi = \arctan \left| \frac{b}{a} \right| - 180^\circ & a < 0 \quad b < 0 \quad 3: \text{e kvadranten} \\ \varphi = -\arctan \left| \frac{b}{a} \right| & a > 0 \quad b < 0 \quad 4: \text{e kvadranten} \end{cases}$$

Några prefix $n \leftrightarrow 10^{-9}$ $\mu \leftrightarrow 10^{-6}$ $m \leftrightarrow 10^{-3}$ $k \leftrightarrow 10^3$ $M \leftrightarrow 10^6$

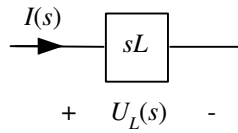
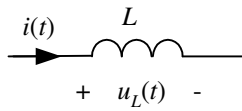
Gränsvinkelfrekvensen ω_g för ett filter ges av $|H(\omega)| = \frac{|H(\omega)|_{\text{MAX}}}{\sqrt{2}}$, där $H(\omega)$ är filtrets frekvensfunktion.

Diverse $\int \frac{dx}{a^2 + b^2 x^2} = \frac{1}{ab} \arctan \frac{bx}{a}$ $X(\Omega) = [X(z)]_{z=e^{j\Omega}}$

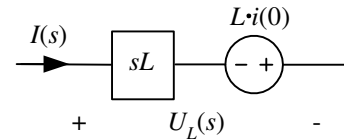
$$t = n \cdot T_s \qquad H(z) = K \cdot \frac{(z - z_{noll1})(z - z_{noll2})}{(z - z_{pol1})(z - z_{pol2})} \qquad H(s) = K \cdot \frac{(s - s_{noll1})(s - s_{noll2})}{(s - s_{pol1})(s - s_{pol2})}$$

Elektriska kretsar

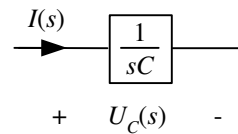
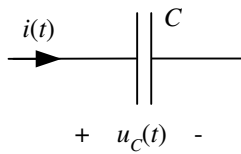
Tidplanet



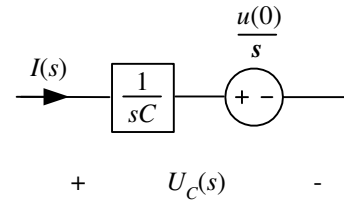
Utan begynnelseenergi



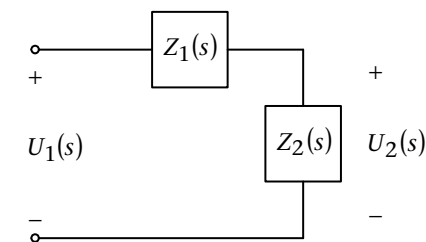
Med begynnelseenergi



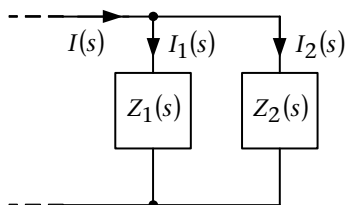
Utan begynnelseenergi



Med begynnelseenergi



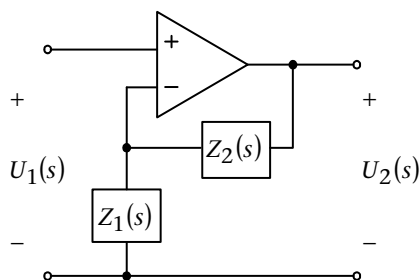
$$U_2(s) = \frac{Z_2(s)}{Z_1(s) + Z_2(s)} \cdot U_1(s)$$



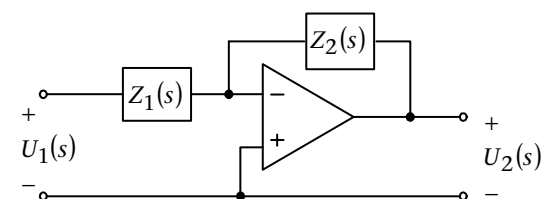
$$I_1(s) = \frac{Z_2(s)}{Z_1(s) + Z_2(s)} \cdot I(s)$$

$$I_2(s) = \frac{Z_1(s)}{Z_1(s) + Z_2(s)} \cdot I(s)$$

Några elektroniksamband



$$\frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{Z_1(s) + Z_2(s)}{Z_1(s)}$$



$$\frac{U_2(s)}{U_1(s)} = -\frac{Z_2(s)}{Z_1(s)}$$